Esercizi su polinomi di Taylor

Calcolare i seguenti polinomi di Taylor con centro in 0, usando ove possibile i polinomi di Taylor noti e le operazioni su polinomi di Taylor.

1. Calcolare $T^3\Big(\dfrac{1}{\cos 2x}\Big)$.

Usiamo i polinomi di Taylor noti:

$$T^3\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3, \qquad T^3 \cos z = 1 - \frac{1}{2}z^2,$$

per cui $T^3 \cos 2x = 1 - 2x^2$,

$$T^3\Big(\frac{1}{\cos 2x}\Big) = T^3\Big(\frac{1}{1-2x^2}\Big)$$

$$= T^3(1 + (2x^2) + (2x^2)^2 + (2x^2)^3) = 1 + 2x^2.$$

2. Calcolare $T^4\Big(\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\Big)$.

La domanda si scrive anche: calcolare $T^4 \cosh 2x$. Cogliamo l'occasione per calcolare $T^n \cosh y$. Dato che

$$T^n e^z = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}z^k, \qquad T^n e^{-z} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(-z)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}z^k,$$

calcolando $T^n e^z + T^n e^{-z}$, i termini di grado dispari si elidono, per cui rimangono solo quelli di grado pari. Dividendo per 2 si ottiene

$$T^{2n} \cosh z = T^{2n+1} \cosh z = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}z^{2k}$$

(ovvero i termini *pari* di $T^{2n}e^z$). Lo stesso tipo di calcolo ci mostra che

$$T^{2n+1}\sinh z = T^{2n+2}\sinh z = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

(ovvero i termini *dispari* di $T^{2n+1}e^z$).

Tornando al nostro esercizio, si ha

$$T^4\cosh 2x = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{(2k)!}(2x)^{2k} = 1+\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{24}(2x)^4 = 1+2x^2+\frac{2}{3}x^4.$$

3. Calcolare $T^3\log\Big(\dfrac{1+2x}{1-3x}\Big)$.

Scriviamo

$$\log\Big(\frac{1+2x}{1-3x}\Big) = \log(1+2x) - \log(1-3x).$$

Usando lo sviluppo

$$T^3\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3},$$

otteniamo ($y = 2x$)

$$T^3\log(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3,$$

e ($y = -3x$)

$$T^3\log(1-3x) = -3x - \frac{(-3x)^2}{2} + \frac{(-3x)^3}{3} = -3x - \frac{9}{2}x^2 - 9x^3.$$

Si ha quindi

$$T^3\log\Big(\frac{1+2x}{1-3x}\Big) = T^3\log(1+2x) - T^3\log(1-3x)$$

$$= (2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3) - (-3x - \frac{9}{2}x^2 - 9x^3) = 5x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{35}{3}x^3.$$

4. Calcolare $T^4(x-5)\log(e^x - x)$.

Si ha

$$T^4(e^x - x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

Dato che in questo polinomio non compare x, basta considerare lo sviluppo fino all'ordine 2 di $\log(1+y)$:

$$T^2 \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2}.$$

Abbiamo

$$T^4 \log(e^x - x) = T^4 \log(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24})$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}T^4\Big(\Big(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\Big)^2\Big)$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{8}x^4 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}.$$

Moltiplicando per $(x-5)$ otteniamo

$$\frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12} - 5(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12})$$

$$= -\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4 - \frac{x^5}{12},$$

e quindi il polinomio cercato si ottiene eliminando il termine in x^5, ovvero

$$T^4(x-5)\log(e^x - x) = -\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4.$$

5. Calcolare $T^3(2x+5)\sqrt{1+\sin x}$.

Calcoliamoci $T^3\sqrt{1+y}$. Se $f(y)=\sqrt{1+y}=(1+y)^{1/2}$ allora si ha

$$f'(y)=\frac{1}{2}(1+y)^{-1/2},\ f''(y)=-\frac{1}{4}(1+y)^{-3/2},\ f'''(y)=\frac{3}{8}(1+y)^{-5/2},$$

e

$$f(0)=1, \qquad f'(0)=\frac{1}{2}, \qquad f''(0)=-\frac{1}{4}, \qquad f'''(0)=\frac{3}{8}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} T^3\sqrt{1+y} &= f(0)+f'(0)y+\frac{1}{2}f''(0)y^2+\frac{1}{6}f'''(0)y^3 \\ &= 1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+\frac{1}{16}y^3. \end{aligned}$$

Ricordando che

$$T^3\sin x = x-\frac{1}{6}x^3,$$

si ha

$$T^3\sqrt{1+\sin x}=1+\frac{1}{2}(x-\frac{1}{6}x^3)-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$$

(nei termini y^2 e y^3 possiamo tralasciare il termine in x^3 perche' viene sempre moltiplicato almeno per x e quindi da' termini almeno di grado 4)

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3.$$

Moltiplicando per $(2x+5)$ si ha quindi

$$2x+x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{24}x^4+5\Big(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{48}x^3\Big)$$

$$= 5 + \frac{9}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{17}{48}x^3 + \frac{1}{24}x^4.$$

Eliminando il termine in x^4 si ottiene il polinomio voluto, ovvero

$$T^3(2x+5)\sqrt{1+\sin x} = 5 + \frac{9}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{17}{48}x^3.$$

.

Esercizi su punti di flesso

1. Trovare i punti di flesso di $f(x) = \arctan(1+x) + 3|x|$.

La funzione non è derivabile in $x = 0$ e quindi qui non ammette flesso. Negli altri punti

$$f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2} + 3\frac{x}{|x|}.$$

e

$$f''(x) = \frac{-2(1+x)}{(1+(1+x)^2)^2}.$$

Dunque f'' cambia segno per $x = -1$, dove ha il suo unico flesso. Notare che f è concava in $(-1,0)$ e in $(0,+\infty)$ ma non in $(-1,+\infty)$.

2. Trovare i punti di flesso di $f(x) = \left|\frac{x}{\log 3x}\right|$.

La funzione è definita per $x > 0$ e $x \neq 1/3$. Negli altri punti è derivabile due volte e

$$f'(x) = \pm\frac{1}{\log^2(3x)}(\log(3x) - 1)$$

(il segno $-$ su $(0,1/3)$, $+$ su $(1/3,+\infty)$) e

$$f''(x) = \pm\frac{2-\log(3x)}{x\log^3(3x)}.$$

Dunque f'' cambia segno per $\log 3x = 2$, ovvero per

$$x = \frac{e^2}{3},$$

dove ha il suo unico flesso.

3. Trovare i punti di flesso di $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x + 7}$.

La funzione è derivabile due volte e si ha

$$f(x) = 1 - \frac{5}{e^x + 7}, \qquad f'(x) = \frac{5e^x}{(e^x + 7)^2},$$

$$f''(x) = 5 \cdot \frac{e^x(7 - e^x)}{(e^x + 7)^3}$$

Dunque f'' cambia segno per $e^x = 7$, ovvero per $x = \log 7$, dove ha il suo unico flesso.

4. Trovare i punti di flesso di $f(x) = 5x + \arctan\Big(\dfrac{x+3}{x+1}\Big)$.

La funzione è definita per $x \neq -1$, ed è due volte derivabile. Si ha

$$f'(x) = 5 - \frac{2}{(x+1)^2 + (x+3)^2},$$

$$f''(x) = 8 \cdot \frac{x+2}{((x+1)^2 + (x+3)^2)^2}.$$

Dunque f'' cambia segno per $x = -2$, dove ha il suo unico flesso.