Limiti di funzione - svolgimenti

Useremo la notazione

$$f(x) \approx g(x) \text{ per } x \to x_0 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Inoltre ricordiamo la definizione di *o piccolo*:

$$f = o(g) \text{ (f è \textit{o piccolo} di g) per } x \to x_0 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Dalla definizione abbiamo subito:

$o(g) + o(g) = o(g), \quad o(cg) = o(g), \quad o(g + o(g)) = o(g), \quad o(f)o(g) = o(fg),$

come nel seguente esempio:

$$\begin{aligned}(x^3 + o(x^3))(x + o(x^2)) + o(x^8) &= x^4 + o(x^5) + o(x^4) + o(x^5) + o(x^8)\\ &= x^4 + o(x^4) + o(x^5) + o(x^8) = x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Per il calcolo di limiti che si presentano nelle forme indeterminate del tipo $0/0$ o ∞/∞ faremo uso anche dei seguenti risultati.

Teorema di De L'Hôpital. (o regola di De L'Hôpital) *Siano* $f, g : I \to \mathbf{R}$ *funzioni definite e derivabili in un intorno destro* I *di* $x_0 \in [-\infty, +\infty[$. *Supponiamo che sia verificata una delle due condizioni:*

i) (*forma* $0/0$) $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0+} g(x) = 0$;

ii) (*forma* ∞/∞) $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0+} g(x) = \infty$

Se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Le stesse conclusioni sono valide per il limite $x \to x_0-$ (*se* f, g *sono definite in un intorno sinistro di* $x_0 \in]-\infty, +\infty]$).

Indicheremo nel corso degli esercizi con (H) l'applicazione del teorema di De L'Hôpital, come nel seguente esempio:

$$\lim_{x\to 0} x \log|x| = \lim_{x\to 0} \frac{\log|x|}{1/x} = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

È spesso utile tenere a mente alcuni “limiti notevoli”, tra i quali ricordiamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1;\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty;$$

$$(\alpha>0)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0;\qquad \lim_{x\to 0}x\log|x|=0.$$

Sarà di estrema utilità nel calcolo dei limiti la *formula di Taylor* (con il resto di Peano):

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o(x-a)^n\quad \text{per } x\to a,$$

valida per esempio per funzioni derivabili $n+1$ volte in un intorno di a. Il *polinomio di Taylor* di f di ordine n e di centro a verrà indicato con

$$T_a^n f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k;$$

se $a=0$ si ometterà l’indice a. Dalla formula di Taylor e dalla definizione di “o piccolo” si ottiene subito che in certi limiti si può sostituire alla funzione il suo polinomio di Taylor, dall’uguaglianza

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{T_a^n f(x)}{(x-a)^n}.$$

Svolgimenti

1) Cercheremo di svolgere questo esercizio usando per quanto possibile la regola di De l’Hôpital. Verifichiamo prima di tutto che si tratti di una forma indeterminata. Ricordiamo che si ha $x\approx\sin x$ per $x\to 0$, e quindi

$$\lim_{x\to 0+}\sin x\log(x^3)=\lim_{x\to 0+}3x\log x=0.$$

La funzione $(1+2x)^{\log x}$ presenta una forma indeterminata del tipo $1^{-\infty}$ per $x\to 0+$. In forma esponenziale si ha

$$(1+2x)^{\log x}=e^{\log x\log(1+2x)}.$$

Dobbiamo quindi calcolare il $\lim\limits_{x\to 0+}\log x\log(1+2x)$. Possiamo applicare il teorema di De L’Hôpital nel seguente modo:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\log(1+2x)}{\frac{1}{\log x}}=(H)=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{2}{1+2x}}{\frac{-1}{x(\log x)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-2x}{1+2x}(\log x)^2 = \lim_{x\to 0+} -2x(\log x)^2 = 0. \tag{1.1}$$

Anche qui abbiamo usato il fatto che

$$\lim_{x\to 0+} x\log^\alpha x = 0$$

per ogni $\alpha > 0$. Quindi si ha che

$$\lim_{x\to 0+} (1+2x)^{\log x} = \lim_{x\to 0+} e^{\log x \log(1+2x)} = e^0 = 1. \tag{1.2}$$

Dunque si ha una forma indeterminata del tipo $0/0$. Possiamo usare il teorema di De L'Hôpital, tenendo conto di quanto visto sopra, e calcolando la derivata

$$D(e^{\log x \log(1+2x)}) = e^{\log x \log(1+2x)} \left(\frac{2}{1+2x}\log x + \frac{1}{x}\log(1+2x)\right).$$

Si ottiene

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(1+2x)^{\log x}-1}{\sin x \log(x^3)} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+} \frac{e^{\log x\log(1+2x)}-1}{x\log x}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+} e^{\log x\log(1+2x)} \left(\frac{\frac{2}{(1+2x)}\log x + \frac{1}{x}\log(1+2x)}{1+\log x}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+} \left(\frac{2\log x}{(1+2x)(1+\log x)} + \frac{\log(1+2x)}{x(1+\log x)}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+} \frac{2\log x}{1+\log x} + \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+2x)}{x(1+\log x)}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+2x)}{x(1+\log x)}.$$

Possiamo ancora applicare il teorema di De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+2x)}{x+x\log x} = (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{2}{1+2x}}{2+\log x} = 0.$$

Quindi il valore del nostro limite è $2/3$.

2) Questo esercizio è simile all' esercizio 1; lo si può quindi svolgere come già visto. Seguiamo qui una strada diversa, cercando di sfruttare alcuni limiti notevoli. Ricordiamo che $\log(1+y) \approx y$ e che $(e^y - 1) \approx y$ per $y \to 0+$, quindi (dato che, come in (1.1), $\log x \log(1-7x) \to 0$)

$$1 - (1-7x)^{\log x} = -(e^{\log x \log(1-7x)} - 1) \approx -\log x \log(1-7x) \text{ per } x \to 0+$$

e anche

$$e^{2x} - 1 \approx 2x \text{ per } x \to 0+ .$$

Dunque possiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1-(1-7x)^{\log x}}{(e^{2x}-1)\log(x^3)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\log x \log(1-7x)}{2x\log(x^3)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\log x \log(1-7x)}{6x \log x}$$

$$= -\frac{1}{6} \lim_{x\to 0+} \frac{\log(1-7x)}{x} = -\frac{1}{6} \lim_{x\to 0+} \frac{-7x}{x} = \frac{7}{6}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato di nuovo che $\log(1-7x) \approx -7x$. Si consiglia di cercare di risolvere l'esercizio 1 seguendo anche questo metodo.

3) Il limite si presenta nella forma indeterminata $1^{+\infty}$, dato che

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x\sin(5x)} = +\infty.$$

Possiamo riscrivere, usando la funzione esponenziale

$$(\cos 3x)^{\dfrac{1}{x\sin(5x)}} = e^{\dfrac{\log(\cos(3x))}{x\sin(5x)}}.$$

Dobbiamo quindi calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\cos(3x))}{x\sin(5x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\log(\cos(3x))}{5x^2}$$

(abbiamo usato $\sin y \approx y$ per $y \to 0$) che si presenta nella forma $0/0$.

Possiamo usare il teorema di De L'Hôpital per ottenere:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\cos(3x))}{5x^2} = (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{-3\tan(3x)}{10x} = -\frac{9}{10}$$

(infatti $\tan y \approx y$ per $y \to 0$). Il limite è quindi $e^{-\frac{9}{10}}$.

4) Come in 3 si ha una forma indeterminata del tipo $1^{+\infty}$, poichè

$$\lim_{x\to 0+} \frac{4x}{\tan 4x} = 1.$$

Si ha quindi

$$\Big(\frac{4x}{\tan 4x}\Big)^{\frac{1}{x\sin 3x}} = e^{\log(\frac{4x}{\tan 4x})\frac{1}{x\sin 3x}}.$$

Si deve calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0+} \log(\frac{4x}{\tan 4x})\frac{1}{x\sin 3x} = \lim_{x\to 0+} \log(\frac{4x}{\tan 4x})\frac{1}{3x^2} = (H)$$

$$= \lim_{x\to 0+} (\frac{\tan 4x}{4x})\frac{4\tan 4x - 16x(1+\tan^2 4x)}{\tan^2 4x}\cdot\frac{1}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{4\tan 4x - 16x}{6x\tan^2 4x} - \frac{8}{3} = \lim_{x\to 0+} \frac{4\tan 4x - 16x}{96x^3} - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{24}\lim_{x\to 0+} \frac{\tan 4x - 4x}{x^3} - \frac{8}{3} = (H)$$

$$= \frac{1}{24}\lim_{x\to 0+} \frac{4\tan^2 4x}{3x^2} - \frac{8}{3} = \frac{8}{9} - \frac{8}{3} = -\frac{16}{9}.$$

Notare che si è usato più volte il fatto che $\tan 4x \approx 4x$ per $x\to 0$.

Il limite cercato è $e^{-\frac{16}{9}}$.

5) Questo limite si può calcolare come i due precedenti. Un altro metodo possibile è usare gli sviluppi di Taylor (che può essere anch'esso utilizzato per i limiti 3 e 4). Per semplificare i calcoli considereremo il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\frac{1}{x\sin 2x}}.$$

Il risultato del limite 5 sarà $1/L$.

Come in 3 e 4 ci si riconduce al calcolo di

$$\lim_{x\to 0+} \log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\frac{1}{2x^2}.$$

Se ricordiamo che

$$\sin 3x = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$$

e che $\log(1+y) = y + o(y)$, si ha

$$\log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \log(1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)) = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

Quindi si ottiene

$$\lim_{x\to 0+} \log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\frac{1}{2x^2} = \lim_{x\to 0+} -\frac{3}{2}x^2\frac{1}{2x^2} = -\frac{3}{4}.$$

Si ha $L = e^{-\frac{3}{4}}$. Il risultato del limite è quindi $1/L = e^{\frac{3}{4}}$.

6) Dato che $\sin(x^2) \approx x^2$ per $x \to 0$ il limite cercato è uguale a

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+2x^2) - 2x^2\cos(x\sqrt{2})}{7x^6}$$

Per semplificare i conti possiamo cambiare variabile, ponendo $y = x\sqrt{2}$. Si ha quindi

$$L = \lim_{y\to 0+} \frac{\log(1+y^2) - y^2\cos y}{7\frac{y^6}{8}} \tag{6.1}$$

Cerchiamo di applicare il teorema di De L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
L = (H) &= \frac{8}{7}\lim_{y\to 0+} \frac{\frac{2y}{1+y^2} - 2y\cos y + y^2\sin y}{6y^5} \\
&= \frac{8}{7}\lim_{y\to 0+} \frac{2y - (1+y^2)(2y\cos y - y^2\sin y)}{6y^5} \\
&= \frac{8}{7}\lim_{y\to 0+} \frac{2 - (1+y^2)(2\cos y - y\sin y)}{6y^4} = (H) = \\
&= \frac{8}{7}\lim_{y\to 0+} \frac{2y(y\sin y - 2\cos y) + (1+y^2)(3\sin y + y\cos y)}{24y^3} \\
&= \frac{1}{21}\lim_{y\to 0+} \frac{y^3\cos y + 5y^2\sin y - 3y\cos y + 3\sin y}{y^3} \\
&= \frac{1}{21}\lim_{y\to 0+} \left(\cos y + 5\frac{\sin y}{y} + 3\frac{\sin y - y\cos y}{y^3}\right) \\
&= \frac{1}{21}(1+5) + \frac{1}{7}\lim_{y\to 0+} \frac{\sin y - y\cos y}{y^3} = (H) = \\
&= \frac{6}{21} + \frac{1}{7}\lim_{y\to 0+} \frac{\cos y - \cos y + y\sin y}{3y^2} = \frac{6}{21} + \frac{1}{21} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Notare che abbiamo usato quando possibile il limite notevole di $\sin y/y$.

7) Come nell'esercizio 6 possiamo usare la relazione $\tan x^4 \approx x^4$ per $x \to 0$, e la sostituzione $y = 2x$ per semplificare i calcoli :

$$\lim_{x\to 0+} \frac{8x^2\cos(2x) - 2\log(1+4x^2)}{7x^2\tan(x^4)} \tag{7.1}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{8x^2\cos(2x) - 2\log(1+4x^2)}{7x^6}$$

$$= -16\Big(\lim_{y\to 0+} 8\cdot\frac{(\log(1+y^2) - y^2\cos y)}{7y^6}\Big). \tag{7.2}$$

Il limite tra parentesi tonde è quello considerato nell'esercizio 6 (vedere la formula (6.1)), quindi il risultato cercato è $-16/3$.

Vogliamo però descrivere un altro metodo per ottenerlo, usando gli sviluppi di Taylor. Consideriamo il limite

$$L = \lim_{y\to 0+} \frac{\log(1+y^2) - y^2\cos y}{y^6}.$$

Per calcolare L dobbiamo calcolare il polinomio di Taylor di grado 6 della funzione

$$f(y) = \log(1+y^2) - y^2\cos y.$$

Ricordiamo che

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + o(z^3)$$

e che

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^4)$$

per cui

$$\log(1+y^2) = y^2 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{3}y^6 + o(y^6)$$

e anche

$$y^2\cos y = y^2 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{24}y^6 + o(y^6).$$

Quindi si ha

$$f(y) = \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\Big)y^6 + o(y^6) = \frac{7}{24}y^6 + o(y^6).$$

Si ha quindi $L = \frac{7}{24}$.

Da (7.2) si ha che il risultato cercato è

$$-\frac{128}{7}L = -\frac{128}{7}\cdot\frac{7}{24} = -\frac{16}{3},$$

come già visto in precedenza.

8) Prima di tutto possiamo semplificare il limite ricordando che $\sin(x\sqrt{6}) \approx x\sqrt{6}$ per $x \to 0$, e usando la sostituzione $y = x\sqrt{2}$. Si ottiene così

$$\frac{2}{31} \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{6}\log(1+2x^2) - 2x\sin(x\sqrt{6})}{\sqrt{6}x^6}$$

$$= \frac{16}{31\sqrt{3}} \lim_{y\to 0+} \frac{\sqrt{3}\log(1+y^2) - y\sin(y\sqrt{3})}{y^6}. \tag{8.1}$$

Dobbiamo calcolare quindi il limite

$$L = \lim_{y\to 0+} \frac{\sqrt{3}\log(1+y^2) - y\sin(y\sqrt{3})}{y^6}. \tag{8.2}$$

Possiamo usare gli sviluppi di Taylor per il logaritmo ed il seno, ottenendo (come nell'esercizio precedente)

$$\log(1+y^2) = y^2 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{3}y^6 + o(y^6)$$

e anche

$$\begin{aligned} y\sin(y\sqrt{3}) =& y\Big(y\sqrt{3} - \frac{1}{6}(y\sqrt{3})^3 + \frac{1}{120}(y\sqrt{3})^5 + o(y^5)\Big) \\ =& y^2\sqrt{3} - \frac{1}{2}y^4\sqrt{3} + \frac{3}{40}y^6\sqrt{3} + o(y^6). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} &\sqrt{3}\log(1+y^2) - y\sin(y\sqrt{3}) \\ &\qquad = \sqrt{3}(y^2 - \frac{y^4}{2} + \frac{y^6}{3}) - (y^2\sqrt{3} - \frac{y^4}{2}\sqrt{3} + \frac{3y^6}{40}\sqrt{3}) + o(y^6) \\ &\qquad = \Big(\frac{1}{3} - \frac{3}{40}\Big)y^6\sqrt{3} + o(y^6) = \frac{31}{120}y^6\sqrt{3} + o(y^6), \end{aligned}$$

e dunque

$$L = \lim_{y\to 0+} \frac{\frac{31}{120}y^6\sqrt{3} + o(y^6)}{y^6} = \frac{31}{120}\sqrt{3}, \tag{8.3}$$

e il risultato cercato è (si veda (8.1))

$$\frac{16}{31\sqrt{3}}L = \frac{2}{15}. \tag{8.4}$$

9) Questo esercizio è completamente analogo al precedente. Infatti, se usiamo il fatto che $\tan(x\sqrt{6}) \approx x\sqrt{6}$ per $x \to 0$, otteniamo il limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{4x\sqrt{2}\sin(x\sqrt{3}) - 4\sqrt{6}\log(1+x^2)}{x^6\sqrt{6}}$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{3}}\Big(\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{3}\log(1+x^2) - x\sin(x\sqrt{3})}{x^6}\Big).$$

La quantità tra parentesi in quest'ultima espressione è esattamente il limite L nella formula (8.2), il cui valore è $\frac{31}{120}\sqrt{3}$ come calcolato in (8.3). Quindi il risultato cercato è

$$-\frac{4}{\sqrt{3}}L = -\frac{31}{30}.$$

Si consiglia di cercare di calcolare questo limite e i due precedenti anche mediante l'uso della regola dell'Hopital, come descritto nello svolgimento dell'esercizio 6, e confrontare i due metodi.

10) La funzione $\arcsin(\cos x)$ è continua in $x = 0$, e quindi possiamo sostituire nel limite $\arcsin(\cos 0) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, ottenendo

$$\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(\sin x) - \arctan x}{x^5}.$$

In questo caso sembra che la regola dell'Hopital sia difficile da applicare (provare per credere!), dal momento che si deve derivare 5 volte la funzione composta $\sin(\sin x)$, e non sembrano facili le semplificazioni come per esempio nell'esercizio 6. Cerchiamo quindi di usare gli sviluppi di Taylor fino al quint'ordine per le funzioni $\sin(\sin x)$ e $\arctan x$. Si ha (ricordando lo sviluppo di Taylor del seno, e che $\sin x \approx x$ per $x \to 0$):

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6}(\sin x)^3 + \frac{1}{120}(\sin x)^5 + o(\sin^5 x)$$

$$= \sin x - \frac{1}{6}(\sin x)^3 + \frac{1}{120}(\sin x)^5 + o(x^5).$$

Dal momento che

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$$

$$(\sin x)^3 = (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))^3 = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^5) \tag{10.1}$$

$$(\sin x)^5 = (x + o(x))^5 = x^5 + o(x^5),$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\sin(\sin x) &= (x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5) - \frac{1}{6}(x^3 - \frac{1}{2}x^5) + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5),$$

e quindi

$$\sin(\sin x) - \arctan x = \Big(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}\Big)x^5 + o(x^5) = -\frac{1}{10}x^5 + o(x^5).$$

Il limite cercato è quindi

$$\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(\sin x) - \arctan x}{x^5} = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{1}{10}x^5 + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{5\pi}.$$

11) Questo limite è simite al precedente. Notiamo che si può sostituire nel limite $\arctan(\cos 0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, ottenendo

$$\frac{4}{\pi}\lim_{x\to 0+}\frac{\arctan(\sin x) - x\cos x}{x^5}.$$

Anche qui utilizziamo gli sviluppi di Taylor fino al quint'ordine. Ricordando lo sviluppo dell'arcotangente, che $\sin x \approx x$ per $x \to 0$ e tenendo conto degli sviluppi già visti in (10.1), si ottiene:

$$\begin{aligned}\arctan(\sin x) &= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + o(\sin^5 x)\\ &= (x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5) - \frac{1}{3}(x^3 - \frac{1}{2}x^5) + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)\\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Inoltre si ha

$$x\cos x = x(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + o(x^5),$$

e quindi

$$\arctan(\sin x) - x\cos x = (\frac{3}{8} - \frac{1}{24})x^5 + o(x^5) = \frac{1}{3}x^5 + o(x^5).$$

Sostituendo questo sviluppo nel limite si ottiene il risultato:

$$\frac{4}{\pi}\lim_{x\to 0+}\frac{\arctan(\sin x) - x\cos x}{x^5} = \frac{4}{\pi}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{3}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{4}{3\pi}.$$

12) Dal momento che $\sinh(1) = \frac{1}{2}(e - e^{-1})$ basta esaminare il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\sin x} + \log(\frac{1-x}{e})}{x^3} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\sin x} + \log(1-x) - 1}{x^3}.$$

Cerchiamo di applicare il teorema di De L'Hôpital.

$$\begin{aligned} L =&(H) = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\sin x}\cos x - \frac{1}{1-x}}{3x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{(1-x)e^{\sin x}\cos x - 1}{3x^2} \\ =&(H) = \lim_{x\to 0+} \frac{-e^{\sin x}\cos x + (1-x)e^{\sin x}\cos^2 x - (1-x)e^{\sin x}\sin x}{6x} \\ =& \lim_{x\to 0+} e^{\sin x}\ \cos x \left(\frac{(1-x)\cos x - 1}{6x}\right) - \lim_{x\to 0+} e^{\sin x}(1-x)\ \frac{\sin x}{6x}. \end{aligned}$$

Se notiamo che $\sin x \approx x$, $e^{\sin x} \to 1$, $\cos x \to 1$, e $(1-x) \to 1$ per $x \to 0$, possiamo semplificare il limite ottenendo

$$\begin{aligned} L =& \lim_{x\to 0+} \frac{(1-x)\cos x - 1}{6x} - \frac{1}{6} \\ =& (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{-\cos x - (1-x)\sin x}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Il risultato cercato è quindi

$$\frac{1}{\sinh 1} L = \frac{2e}{3(1-e^2)}.$$

13) Questo esercizio è analogo all'esercizio 12. Si può quindi svolgere usando la regola di De L'Hôpital. Un altro modo è usare gli sviluppi di Taylor fino all'ordine 3. Si ha

$$e^{\arctan x} = 1 + \arctan x + \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \frac{1}{6}(\arctan x)^3 + o((\arctan x)^3).$$

D'altronde

$$\begin{aligned} \arctan x \ &= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ \arctan^2 x &= (x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))^2 = x^2 + o(x^3) \\ \arctan^3 x &= (x + o(x))^3 = x^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

e quindi, dato che $\arctan x \approx x$,

$$e^{\arctan x} = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Si ha anche
$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
e quindi
$$e^{\arctan x} + \log(\frac{1-x}{e}) = e^{\arctan x} + \log(1-x) - 1 = -\frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$
Il nostro limite vale dunque (dato che $\cosh(\sin x) \to 1$ e $\sin^2 x \approx x^2$)
$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{\arctan x} + \log(\frac{1-x}{e})}{x \sin^2 x \cosh(\sin x)}$$

$$(13.1) \qquad = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\arctan x} + \log(\frac{1-x}{e})}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2}.$$
Si consiglia di risolvere anche l'esercizio precedente usando gli sviluppi di Taylor.

14) Questo limite è analogo ai due precedenti. Si può quindi risolvere sia usando gli sviluppi di Taylor che utilizzando la regola di De L'Hôpital. Ricordando che $\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ si ha $\cosh x - 1 \approx \frac{1}{2}x^2$ e quindi
$$(\cosh x - 1)\sin x \approx \frac{1}{2}x^3.$$
Il nostro limite vale quindi
$$2 \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\arctan x} + \log(\frac{1+x}{e})}{x^3}.$$
Cambiando variabile $y = -x$ otteniamo
$$-2 \lim_{y\to 0-} \frac{e^{\arctan y} + \log(\frac{1-y}{e})}{y^3}.$$
Questo limite è analogo a quello già considerato in (13.1). Quindi il risultato cercato è 1.

15) Dal momento che $x^{-2} \to +\infty$ per $x \to 0$, si ha $\arctan(x^{-2}) \to \frac{\pi}{2}$ per $x \to 0$. Quindi il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Il denominatore si comporta come $9x^6$ (poichè $\sin^3 x \approx x^3$). Il nostro limite è quindi eguale al limite

$$L = \frac{1}{9} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x^{-2}) - \sin(x^2)}{x^6}.$$

Notiamo che la variabile x compare sempre con potenze pari. Questo ci suggerisce il cambiamento di variabile $y = x^2$. Si ottiene quindi

$$L = \frac{1}{9} \lim_{y\to 0+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(y^{-1}) - \sin y}{y^3}.$$

Notiamo che non possiamo usare gli sviluppi di Taylor a questo punto poichè l'argomento dell'arcotangente tende a $+\infty$. Applichiamo la regola di De L'Hôpital, ricordando che

$$D\big(\arctan(y^{-1})\big) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{y}\right)^2} \cdot \Big(-\frac{1}{y^2}\Big) = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} L = (H) &= \frac{1}{9} \lim_{y\to 0+} \frac{\frac{1}{1+y^2} - \cos y}{3y^2} \\ &= \frac{1}{27} \lim_{y\to 0+} \frac{1 - (1+y^2)\cos y}{y^2} \end{aligned} \tag{15.1}$$

A questo punto possiamo scegliere se utilizzare lo sviluppo di Taylor fino all'ordine 2 per il coseno, o procedere continuando ad usare la regola dell'Hopital. Scegliamo per esempio questa seconda strada (ma si consiglia di verificare anche mediante la prima – cfr. la risoluzione dell'esercizio 17):

$$\begin{aligned} L = (H) &= \frac{1}{27} \lim_{y\to 0+} \frac{-2y\cos y + (1+y^2)\sin y}{2y} \\ &= \frac{1}{27}\Big(- \lim_{y\to 0+} \cos y + \lim_{y\to 0+} (1+y^2)\frac{\sin y}{2y} + \lim_{y\to 0+} \frac{y}{2}\sin y\Big) \\ &= \frac{1}{27}(-1 + \frac{1}{2} + 0) = -\frac{1}{54}. \end{aligned}$$

16) Come nell'esercizio precedente il limite è nella forma indeterminata 0/0, e non è possibile utilizzare direttamente gli sviluppi di Taylor. Si può applicare la regola di De L'Hôpital, usando anche che $\sin(x^3) \approx x^3$, e che

$$D\big(\arctan(\frac{1}{\sin x})\big) = \frac{-\cos x}{1+\sin^2 x},$$

ottenendo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{\sin x}) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(x\sqrt{3})}{6x^2\sin(x^3)}$$

(16.1)

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{\sin x}) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(x\sqrt{3})}{x^5}$$

$$= (H) = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0+} \frac{\dfrac{\cos x}{(1+\sin^2 x)} - \cos(x\sqrt{3})}{5x^4}$$

$$= \frac{1}{30}\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - (1+\sin^2 x)\cos(x\sqrt{3})}{x^4}.$$

Possiamo usare gli sviluppi di Taylor per seno e coseno fino all'ordine 4:

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\
\sin^2 x &= \Big(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \\
\cos(x\sqrt{3}) &= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4),
\end{aligned}$$

ottenendo

$$\begin{aligned}
&\cos x - (1+\sin^2 x)\cos(x\sqrt{3}) \\
&= \Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\Big) - \Big(1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4\Big)\Big(1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4\Big) + o(x^4) \\
&= \frac{3}{2}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione in (16.1) si ottiene

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{30}\cdot\frac{\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{20}.$$

17) Questo limite è simile ai due precedenti, in special modo all'esercizio 15. In questo caso il limite è eseguito per $x \to 0-$, e quindi $(\sin x)^{-3} \to -\infty$ e

$$\lim_{x\to 0-} \arctan(\frac{1}{\sin^3 x}) = -\frac{\pi}{2}.$$

Abbiamo quindi una forma indeterminata $0/0$. Notiamo che si ha

$$x^2 \sin(x^7) \approx x^9 \approx \sin^9 x;$$

Il nostro limite è quindi uguale a

$$L = \frac{1}{7} \lim_{x\to 0-} \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan(\frac{1}{\sin^3 x}) + \sin(\sin^3 x)}{\sin^9 x},$$

dove la variabile x compare sempre tramite $\sin^3$. Questo fatto ci suggerisce il cambiamento di variabile $y = -\sin^3 x$, che porta al limite

$$L = \frac{1}{7} \lim_{y\to 0+} \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan(-\frac{1}{y}) + \sin(-y)}{-y^3}$$

$$= -\frac{1}{7} \lim_{y\to 0+} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{y}) - \sin(y)}{y^3}.$$

Questo limite è stato considerato nell'esercizio 15. Applicando la regola di De L'Hôpital, si ottiene (come in (15.1)):

$$L = -\frac{1}{7} \lim_{y\to 0+} \frac{1 - (1+y^2)\cos y}{3y^2}.$$

Dato che $\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$, si ha

$$1 - (1+y^2)\cos y = 1 - (1+y^2)(1 - \frac{1}{2}y^2) + o(y^2) = -\frac{1}{2}y^2 + o(y^2),$$

e quindi

$$L = -\frac{1}{7} \lim_{y\to 0+} \frac{-\frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\cos y}{3y^2} = \frac{1}{42}.$$

18) Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Al denominatore troviamo $x^2 \sin^3 x \approx x^5$. Un'applicazione della regola di De L'Hôpital sembra piuttosto complicata. Cerchiamo di usare quindi gli sviluppi di Taylor al grado 5. Abbiamo

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$$

$$\cos(3x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^5)$$

$$\cos(x\sqrt{10}) = 1 - 5x^2 + \frac{25}{6}x^4 + o(x^5)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)$$

$$e^{-3x} = 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2),$$

e dunque

$$e^x \cos(3x) = 1 + x - 4x^2 - \frac{13}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \frac{79}{30}x^5 + o(x^5)$$

$$\frac{\cos(x\sqrt{10})}{1-x} = 1 + x - 4x^2 - 4x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^5 + o(x^5)$$

$$\frac{1}{3}x^3 e^{-3x} = \frac{1}{3}x^3 - x^4 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5).$$

Si ha quindi

$$e^x \cos(3x) - \frac{\cos(x\sqrt{10})}{1-x} + \frac{1}{3}x^3 e^{-3x} = \Big(\frac{79}{30} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2}\Big)x^5 + o(x^5) = \frac{119}{30}x^5 + o(x^5),$$

ed infine

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x \cos(3x) - \frac{\cos(x\sqrt{10})}{1-x} + \frac{1}{3}x^3 e^{-3x}}{17x^2 \sin^3 x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{119}{30}x^5 + o(x^5)}{17x^5} = \frac{7}{30}.$$

19) Anche in questo esercizio usiamo gli sviluppi di Taylor. Esaminiamo però prima il denominatore: dato che $\arctan y \approx y$ per $y \to 0$, si ha

$$x^3\Big(\arctan\frac{x}{2}\Big)^2 \approx x^3\Big(\frac{x}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}x^5.$$

Dobbiamo sviluppare il numeratore quindi fino all'ordine 5. Dagli sviluppi di esponenziale, sin e della funzione $1/(1+x)$ otteniamo

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$\sin(3x) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{243}{120}x^5 + o(x^5),$$

$$\begin{aligned} e^{-x}\sin(3x) &= 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{243}{120}x^5 - x(3x - \frac{9}{2}x^3) \\ &\quad + \frac{1}{2}x^2(3x - \frac{9}{2}x^3) - \frac{1}{6}x^3 \cdot 3x + \frac{1}{24}x^4 \cdot 3x + o(x^5) \\ &= 3x - 3x^2 - 3x^3 + 5x^4 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{3x}{1+x} &= -3x\Big(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)) \\ &= -3x + 3x^2 - 3x^3 + 3x^4 - 3x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$e^{-\frac{7}{6}x} = 1 - \frac{7}{6}x + \frac{49}{72}x^2 + o(x^2),$$

$$6x^3 e^{-\frac{7}{6}x} = 6x^3 - 7x^4 + \frac{49}{12}x^5 + o(x^5).$$

Dunque si ottiene

$$e^{-x}\sin(3x) - \frac{3x}{1+x} + 6x^3 e^{-\frac{7}{6}x} = \frac{71}{60}x^5 + o(x^5),$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-x}\sin(3x) - \frac{3x}{1+x} + 6x^3 e^{-\frac{7}{6}x}}{x^3\Big(\arctan\frac{x}{2}\Big)^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{71}{60}x^5 + o(x^5)}{\frac{1}{4}x^5} = \frac{71}{15}.$$

20) Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Calcoliamolo usando gli sviluppi di Taylor. A differenza degli esercizi precedenti, non è presente nè al numeratore nè al denominatore alcuna espressione riconducibile immediatamente a una funzione del tipo x^α; non è chiaro quindi a quale ordine ci dobbiamo arrestare negli sviluppi.

Consideriamo il numeratore; si nota che è una funzione di $\sin(\sin x)$. Dal momento che $\sin(\sin x) \approx x$, e $\arctan y = y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3)$, si ha

$$\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x)$$

$$= \sin(\sin x) - \frac{1}{3}(\sin(\sin x))^3 + o((\sin(\sin x))^3) - \sin(\sin x) = -\frac{1}{3}(\sin(\sin x))^3 + o(x^3).$$

Dal momento che $\sin(\sin x) \approx x$ (verificarlo!), si ottiene

$$\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x) \approx -\frac{1}{3}x^3.$$

Dobbiamo quindi sviluppare anche il denominatore fino all'ordine 3. Si ha

$$\begin{aligned}\arctan(\sin x) =&\ \sin x - \frac{1}{3}(\sin x)^3 + o((\sin x)^3)\\ &= (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) - \frac{1}{3}(x + o(x^3))^3 + o(x^3)\\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

e quindi

$$\arctan(\sin x) - \arctan x = (x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)) - (x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

In conclusione, otteniamo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x)}{\arctan(\sin x) - \arctan x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = 2.$$

21) L'esercizio è analogo a 20. Risolviamolo usando gli sviluppi di Taylor:

$$\begin{aligned}\sin(\arctan(\sin x)) =&\ \arctan(\sin x) - \frac{1}{6}(\arctan(\sin x))^3 + o(\arctan(\sin x))^3\\ =&\ \arctan(\sin x) - \frac{1}{6}(\arctan(\sin x))^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Notare che abbiamo usato il fatto che $\arctan(\sin x) \approx \sin x \approx x$ per $x \to 0$.

Inoltre abbiamo

$$\begin{aligned}\sin(\arctan x) =&\ \arctan x - \frac{1}{6}(\arctan x)^3 + o(\arctan^3 x)\\ &= (x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) - \frac{1}{6}(x + o(x))^3 + o(x^3)\\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Qui abbiamo usato $\arctan x \approx x$ per $x \to 0$.

Dunque si ha

$$\sin(\arctan(\sin x)) - \arctan(\sin x) = -\frac{1}{6}(\arctan(\sin x))^3 + o(x^3) \approx -\frac{1}{6}x^3,$$

e anche

$$\sin(\arctan x) - \sin x = (x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Si ottiene quindi

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(\arctan(\sin x)) - \arctan(\sin x)}{\sin(\arctan x) - \sin x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{2}.$$

22) Questo esercizio è in parte simile ai due precedenti. Notiamo che il numeratore è una funzione di $\sin(\sin x)$. Usando lo sviluppo di Taylor per la funzione "tangente" al grado 3 si ottiene

$$\begin{aligned}\tan(\sin(\sin x)) - \ \sin(\sin x) \\ &= (\sin(\sin x) + \frac{1}{3}(\sin(\sin x)^3 + o((\sin(\sin x))^3) - \sin(\sin x) \\ &= \frac{1}{3}(\sin(\sin x))^3 + o((\sin(\sin x))^3) = \frac{1}{3}(\sin(\sin x))^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

(Si è usato $\sin(\sin x) \approx \sin x \approx x$ per $x \to 0$).

Analogamente il denominatore è una funzione di $\sin(\tan x)$. Usando gli sviluppi di Taylor per tan e sin si ottiene:

$$\begin{aligned}\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x)) &= \Big(\sin(\tan x) + \frac{1}{3}(\sin(\tan x))^3 + o((\sin(\tan x))^3)\Big) \\ &- \Big(\sin(\tan x) - \frac{1}{6}(\sin(\tan x))^3 + o((\sin(\tan x))^3)\Big) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(\tan x))^3 + o((\sin(\tan x))^3) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(\tan x))^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x)}{\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x))} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{3}(\sin(\sin x))^3}{\frac{1}{2}(\sin(\tan x))^3} = \frac{2}{3}$$

(come già visto infatti $\sin(\sin x) \approx x \approx \sin(\tan x)$).

23) Quest'esercizio è analogo al precedente. Come nell'esercizio 20 abbiamo

$$\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x) \approx -\frac{1}{3}(\sin(\sin x))^3 \approx -\frac{1}{3}x^3,$$

mentre nell'esercizio 22 abbiamo già visto che

$$\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x)) \approx \frac{1}{2}(\sin(\tan x))^3 \approx \frac{1}{2}x^3$$

per cui

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x)}{\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x))} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^3} = -\frac{2}{3}.$$

24) Come già visto nell'esercizio 22, possiamo calcolare lo sviluppo di Taylor del denominatore ottenendo:

$$\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x)) = \frac{1}{2}(\sin(\tan x))^3 + o(x^3) = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

Quindi dobbiamo sviluppare anche il numeratore fino al grado 3. Sempre riguardando l'esercizio 22 otteniamo lo sviluppo di Taylor

$$\tan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x) = \frac{1}{3}(\sin(\sin x))^3 + o(x^3) = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

mentre si ha

$$\sin x^3 = x^3 + o(x^3);$$

dunque il numeratore ha lo sviluppo

$$\tan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x) - \sin x^3 = -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

Il limite cercato vale quindi

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x) - \sin x^3}{\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x))} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = -\frac{4}{3}.$$

25) Questo esercizio differisce dal precedente solamente perchè i ruoli di numeratore e denominatore sono invertiti. Dall'esercizio 23 infatti si ottiene per il numeratore:

$$\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x) \approx -\frac{1}{3}x^3;$$

quindi anche per il denominatore dobbiamo calcolare lo sviluppo di Taylor fino all'ordine 3. Possiamo ancora ricordare i calcoli dell'esercizio 22, e ottenere

$$\tan(\sin(\tan x)) - \sin(\sin(\tan x)) = \frac{1}{2}(\sin(\tan x))^3 + o(x^3) = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

Quindi per il denominatore otteniamo

$$\begin{aligned}\sin x^3 - \tan(\sin(\tan x)) + \sin(\sin(\tan x)) &= \sin x^3 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\\ &= x^3 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Dunque il limite cercato è:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\arctan(\sin(\sin x)) - \sin(\sin x)}{\sin x^3 - \tan(\sin(\tan x)) + \sin(\sin(\tan x))} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = -\frac{2}{3}.$$

26) Il limite si presenta nella forma forma indeterminata 0/0. Esaminiamo il denominatore usando gli sviluppo di Taylor di sin e tan:

$$\begin{aligned}\sin^2 x - 2\sin x\tan x + \tan^2 x &= (\sin x - \tan x)^2\\ &= \Big((\sin x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) - (\sin x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))\Big)^2\\ &= (-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3))^2 = \frac{1}{4}x^6 + o(x^6).\end{aligned}$$

Il nostro limite è quindi uguale a

$$L = 4\lim_{x\to 0+}\frac{\log(\cos 2x) + 2x^2\cosh(\frac{2}{\sqrt{3}}x)}{x^6}.$$

Possiamo usare gli sviluppi di Taylor fino all'ordine 6:

$$\cos 2x = \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 - \frac{1}{6!}(2x)^6 + o(x^6) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6).$$

Ricordiamo che

$$\log(1-y) = -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3),$$

per cui

$$\begin{aligned}\log(\cos 2x) =&\ \log(1 - (2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{45}x^6 + o(x^6)))\\ =&\ -(2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{45}x^6) - \frac{1}{2}(2x^2 - \frac{2}{3}x^4)^2 - \frac{1}{3}(2x^2)^3 + o(x^6)\\ =&\ -(2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{45}x^6) - \frac{1}{2}(4x^4 - \frac{8}{3}x^6) - \frac{1}{3}(8x^6) + o(x^6)\\ =&\ -2x^2 - \frac{4}{3}x^4 - \frac{64}{45}x^6 + o(x^6).\end{aligned}$$

Basta sviluppare $\cosh x$ fino all'ordine 4:

$$\cosh(\frac{2}{\sqrt{3}}x) = 1 + \frac{1}{2}(\frac{2}{\sqrt{3}}x)^2 + \frac{1}{24}(\frac{2}{\sqrt{3}}x)^4 + o(x^4) = 1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{27}x^4 + o(x^4),$$

per ottenere

$$2x^2\cosh(\frac{2}{\sqrt{3}}x) = 2x^2(1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{27}x^4 + o(x^4)) = 2x^2 + \frac{4}{3}x^4 + \frac{4}{27}x^6 + o(x^6).$$

Si ha infine

$$\log(\cos 2x) + 2x^2\cosh(\frac{2}{\sqrt{3}}x) = (-\frac{64}{45} + \frac{4}{27})x^6 + o(x^6) = -\frac{172}{135}x^6 + o(x^6),$$

per cui

$$L = 4\lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{172}{135}x^6 + o(x^6)}{x^6} = -\frac{688}{135}.$$

27) Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Possiamo subito semplificare il denominatore usando $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, per cui $x - \sin x \approx \frac{1}{6}x^3$. Si ha quindi

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[2]{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{(x - \sin x)\sqrt[2]{x}} = 6 \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[2]{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{x^3 \sqrt[2]{x}}.$$

Possiamo semplificare quest'espressione ponendo $y = x^{\frac{3}{2}}$, per cui

$$\sqrt[2]{x} = \sqrt[3]{y} \qquad x^3 \sqrt[2]{x} = y^2 \sqrt[3]{y},$$

e

$$L = \lim_{y\to 0+} \frac{\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{\sin y}}{y^2 \sqrt[3]{y}}.$$

Razionalizziamo, moltiplicando per $\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{y\ \sin y} + \sqrt[3]{\sin^2 y}(\approx 3\sqrt[3]{y^2})$ numeratore e denominatore:

$$L = 6 \lim_{y\to 0+} \frac{y - \sin y}{(\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{y \sin y} + \sqrt[3]{\sin^2 y})y^2 \sqrt[3]{y}} = 6 \lim_{y\to 0+} \frac{y - \sin y}{(3\sqrt[3]{y^2})y^2 \sqrt[3]{y}}$$

$$= 2 \lim_{y\to 0+} \frac{\frac{1}{6}y^3}{y^3} = \frac{1}{3}$$

(si è usato di nuovo $y - \sin y \approx \frac{1}{6}y^3$).

28) Anche questo limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Vogliamo risolverlo usando gli sviluppi di Taylor di arctan e di $(1+x)^\alpha$. Prima di tutto ricordiamo che $e^x - 1 \approx x$ per $x \to 0$ e quindi il limite si può scrivere anche

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{\arctan(x^{\frac{3}{4}})}}{x\sqrt[4]{x^3}}.$$

Per semplificare i calcoli possiamo cambiare variabile ponendo $y = x^{\frac{3}{4}}$, per cui il limite diventa

$$\lim_{y\to 0+} \frac{\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{\arctan y}}{y^2 \sqrt[3]{y}} = \lim_{y\to 0+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\arctan y}{y}}}{y^2}.$$

Usando gli sviluppi

$$\arctan y = y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3),$$

$$(1+z)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}z + o(z),$$

si ottiene

$$1 - \sqrt[3]{\frac{\arctan y}{y}} = 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{3}y^2 + o(y^2)} = 1 - \left(1 - \frac{1}{9}y^2 + o(y^2)\right) = \frac{1}{9}y^2 + o(y^2).$$

Dunque il nostro limite vale

$$\lim_{y\to 0+} \frac{\frac{1}{9}y^2 + o(y^2)}{y^2} = \frac{1}{9}.$$

29)

Esaminiamo l'integrale

$$\int_0^x (8t^3 + \sin(t^7)t^2)dt.$$

Si ha $8t^3 + \sin(t^7)t^2 \geq 8t^3 - t^2$, per cui

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x (8t^3 + \sin(t^7)t^2)dt \geq \lim_{x\to+\infty} \int_0^x (8t^3 - t^2)dt = (2x^4 - \frac{1}{3}x^3) = +\infty.$$

Quindi il nostro limite si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Possiamo applicare la regola di De L'Hôpital, ricordando che

$$D\Big(\int_0^x (8t^3 + \sin(t^7)t^2)dt\Big) = 8x^3 - \sin(x^7)x^2.$$

Abbiamo dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^x (8t^3 + \sin(t^7)t^2)dt}{3x^4} = (H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^3 - \sin(x^7)x^2}{12x^3}$$

$$= \frac{2}{3} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^7)}{12x} = \frac{2}{3}.$$

30) Il limite è analogo a quello dell'esercizio precedente. Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x^5} \int_2^x 10t^4 dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x^5} \Big[2t^5\Big]_2^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3x^5}(x^5 - 2^5) = \frac{2}{3}.$$

Per quanto riguarda il secondo pezzo del limite, abbiamo $|\sin(t^7)t^2| \leq t^2$, e quindi

$$\Big|\int_2^x \sin(t^7)t^2 dt\Big| \leq \int_2^x |\sin(t^7)t^2| dt$$

$$\leq \int_2^x t^2 dt = \frac{1}{3}(x^3 - 8) \leq \frac{1}{3}x^3,$$

e anche

$$\Big|\frac{1}{3x^5} \int_2^x \sin(t^7)t^2 dt\Big| \leq \frac{1}{9x^2} \to 0$$

per $x \to +\infty$. Dunque, per il teorema del confronto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x^5} \int_2^x \sin(t^7)t^2 dt = 0$$

e il limite cercato vale $\frac{2}{3}$.

31) Il limite, a prima vista, non si presenta in nessuna delle forme indeterminate già viste. Basta però ricordare la formula di cambiamento di base nei logaritmi:

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a},$$

per ottenere il limite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(17\sqrt[10]{x} + \sin(10x))}{\log(10\sqrt[3]{x})} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\Big(17\sqrt[10]{x}\big(1 + \frac{1}{17}x^{-\frac{1}{10}}\sin(10x)\big)\Big)}{\log(10\sqrt[3]{x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(17\sqrt[10]{x}) + \log\Big(1 + \frac{1}{17\sqrt[10]{x}}\sin(10x)\Big)}{\log(10\sqrt[3]{x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(17x^{1/10})}{\log(10x^{1/3})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(17) + \frac{1}{10}\log x}{\log(10) + \frac{1}{3}\log x} = \frac{3}{10}.
\end{aligned}$$

Abbiamo usato il fatto che $x^{-1/10}\sin(10x) \to 0$ per $x \to +\infty$.

32) L'esecizio è analogo al precedente: cambiando base al logaritmo si ottiene il limite

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(17\sqrt[2]{x} + \sin(2x))}{\log(2\sqrt[3]{x})}.$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata ∞/∞; possiamo cercare quindi di usare la regola di De L'Hôpital, ricordando che

$$\begin{aligned}
D\big(\log(17\sqrt[2]{x} + \sin(2x))\big) &= \frac{1}{17\sqrt[2]{x} + \sin(2x)}(17\frac{1}{2}x^{-1/2} + 2\cos(2x)) \\
D\big(\log(2\sqrt[3]{x})\big) &= \frac{1}{3x}.
\end{aligned}$$

Si ottiene quindi:

$$L = (H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{17 + 4\sqrt{x}\ \cos(2x)}{17\sqrt{x} + \sin(2x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{34}(17 + 4\sqrt{x}\ \cos(2x))$$

(si è usato $17\sqrt{x} + \sin(2x) \approx 17\sqrt{x}$ per $x \to +\infty$). Quest'ultimo limite NON ESISTE (si nota subito che la funzione $17 + 4\sqrt{x}\ \cos(2x)$ ha delle "oscillazioni" sempre maggiori). Questo NON VUOL DIRE che il limite L non esiste: solamente che NON SI

PUÒ applicare la regola di De L'Hôpital. Si deve quindi procedere come nell'esercizio precedente, ottenendo:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(17\sqrt[2]{x})}{\log(2\sqrt[3]{x})}.$$

A questo punto si può anche usare la regola di De L'Hôpital, e ottenere

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2x}}{\frac{1}{3x}} = \frac{3}{2}.$$

33) Come negli esercizi 29 e 30 si ha di fronte un limite nella forma indeterminata ∞/∞. Si può risolvere questo esercizio come già visto in precedenza, ricordando che

$$D\Big(\int_0^y (8t^{\frac{1}{3}} + \sin(t^7)t^{\frac{1}{4}})dt\Big) = 8y^{\frac{1}{3}} + \sin(y^7)y^{\frac{1}{4}},$$

e quindi (per la regola di derivazione di funzioni composte)

$$\begin{aligned} D\Big(\int_0^{x^3} (8t^{\frac{1}{3}} + \sin(t^7)t^{\frac{1}{4}})dt\Big) &= \Big(8(x^3)^{\frac{1}{3}} + \sin((x^3)^7)\ (x^3)^{\frac{1}{4}}\Big)\cdot 3x^2 \\ &= 24x^3 + 3\sin(x^{21})x^{\frac{11}{4}}. \end{aligned}$$

Si ha dunque, usando la regola di De L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{x^3}(8t^{\frac{1}{3}} + \sin(t^7)t^{\frac{1}{4}})dt}{3x^4} &= (H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{24x^3 + 3\sin(x^{21})\ x^{\frac{11}{4}}}{12x^3} \\ &= 2 + \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^{21})}{x^{\frac{1}{4}}} = 2. \end{aligned}$$

Ancora una volta si ha usato che $\sin(x^{21})/x^{\frac{1}{4}} \to 0$ per $x\to+\infty$.

34) Questo limite è simile al precedente. Proponiamo qui un calcolo differente. Notiamo subito che

$$\int_2^{x^4} t^{\frac{1}{4}}\,dt = \Big[\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}}\Big]_2^{x^4} = \frac{4}{5}(x^5 - 2^{\frac{5}{4}}),$$

e quindi il primo pezzo del limite è uguale a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{10}{3x^5}\cdot\frac{4}{5}(x^5 - 2^{\frac{5}{4}}) = \frac{8}{3}.$$

Per quanto riguarda il secondo pezzo, mostriamo che converge a zero. Si ha $|\sin(y)| \le 1$, e quindi

$$\begin{aligned} \Big|\frac{1}{x^5}\int_2^{x^4} \sin(t^7)\ t^{\frac{1}{5}}\,dt\Big| &\le \frac{1}{x^5}\int_2^{x^4} t^{\frac{1}{5}}\,dt = \frac{1}{x^5}\Big[\frac{5}{6}t^{\frac{6}{5}}\Big]_2^{x^4} \\ &= \frac{5}{6x^5}(x^{\frac{24}{5}} - 2^{\frac{6}{5}}) = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{5}} - \frac{5}{3}\ 2^{\frac{1}{5}}x^{-5} \to 0 \end{aligned}$$

per $x\to+\infty$. Questo mostra che il limite cercato è $\dfrac{8}{3}$.

35) Notiamo prima di tutto che si ha

$$\lim_{x\to 0+}\int_{3x}^{2x^2}\sqrt{t}\cos(2t)dt=\lim_{x\to 0+}\int_0^{3x}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=0.$$

Infatti si ha (ricordando che $\sin t\le t$ per $t\ge 0$)

$$\Big|\int_{3x}^{2x^2}\sqrt{t}\cos(2t)dt\Big|\le\int_{3x}^{2x^2}\sqrt{t}dt=\Big[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_{3x}^{2x^2}=\frac{2}{3}\Big((2x^2)^{\frac{3}{2}}-(3x)^{\frac{3}{2}}\Big)\to 0$$

$$\Big|\int_0^{3x}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt\Big|\le\int_0^{3x}\sqrt{t}dt=\Big[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{3x}=\frac{2}{3}(3x)^{\frac{3}{2}}\to 0$$

Dunque abbiamo una forma indeterminata 0/0. Per applicare la regola di De L'Hôpital dobbiamo calcolarci le derivate

$$D\Big(\int_{3x}^{2x^2}\sqrt{t}\cos(2t)dt\Big)=D\Big(\int_0^{2x^2}\sqrt{t}\cos(2t)dt-\int_0^{3x}\sqrt{t}\cos(2t)dt\Big)$$

$$=4x\sqrt{2}|x|\cos(4x^2)-3\sqrt{3x}\cos(6x)$$

$$D\Big(\int_0^{3x}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt\Big)=3\frac{\sin(3x)}{\sqrt{3x}}.$$

Ricordando che $\sin(x^2)\approx x^2$, otteniamo il limite

$$L=\lim_{x\to 0+}\frac{\displaystyle\int_{3x}^{2x^2}\sqrt{t}\cos(2t)+\int_0^{3x}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt}{x^3}$$

$$=(H)=\lim_{x\to 0+}\frac{4x^2\sqrt{2}\cos(4x^2)-3\sqrt{3x}\cos(6x)+3\frac{\sin(3x)}{\sqrt{3x}}}{3x^2}$$

$$=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0+}\sqrt{2}\cos(4x^2)+\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(3x)-3x\cos(6x)}{\sqrt{3}\;x^2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(3x)-3x\cos(6x)}{x^2\sqrt{x}}.$$

Usando gli sviluppi di Taylor di seno e coseno si ottiene

$$3x\cos(6x)=3x(1-18x^2+o(x^2))=3x-54x^3+o(x^3)=3x+o(x^2\sqrt{x})$$

$$\sin 3x=3x-\frac{9}{2}x^3+o(x^3)=3x+o(x^2\sqrt{x})$$

$$\sin 3x-\;3x\cos(6x)=o(x^2\sqrt{x}),$$

per cui si ha

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin 3x - 3x\cos(6x)}{x^2\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{o(x^2\sqrt{x})}{x^2\sqrt{x}} = 0.$$

Dunque il limite cercato vale $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

36) Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0, ed è analogo a quello dell'esercizio precedente. Per applicare la regola di De L'Hôpital dobbiamo calcolare le derivate

$$D\Big(\int_{3x}^{3x^2} \sqrt{t}\cos(2t)dt\Big) = D\Big(\int_0^{3x^2} \sqrt{t}\cos(2t)dt - \int_0^{3x} \sqrt{t}\cos(2t)dt\Big)$$

$$= 6x\sqrt{3}\ |x|\cos(6x^2) - 3\sqrt{3x}\cos(6x)$$

$$D\Big(\int_0^{3x} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt\Big) = 3\frac{\sin(3x)}{\sqrt{3x}}.$$

Ricordando che $\tan(x^2) \approx x^2$, otteniamo il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\displaystyle\int_{3x}^{3x^2} \sqrt{t}\cos(2t) + \int_0^{3x} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt}{x^3}$$

$$= (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{6x^2\sqrt{3}\cos(6x^2) - 3\sqrt{3x}\cos(6x) + 3\frac{\sin(3x)}{\sqrt{3x}}}{3x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0+} \sqrt{3}\cos(6x^2) + \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(3x) - 3x\cos(6x)}{x^2\sqrt{3x}}$$

$$= 2\sqrt{3} + \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(3x) - 3x\cos(6x)}{x^2\sqrt{3x}}.$$

Quest'ultimo limite può venire calcolato come nell'esercizio 35. Un modo per semplificarlo (eliminando le radici quadrate) è semplicemente operare la sostituzione $y = \sqrt{3x}$. Il cambiamento di variabili porta a

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(3x) - 3x\cos(6x)}{x^2\sqrt{3x}} = 9\lim_{y\to 0+} \frac{\sin(y^2) - y^2\cos(2y^2)}{y^5}.$$

Questo limite si può calcolare utilizzando gli sviluppi di Taylor di seno e coseno come nell'esercizio precedente, oppure direttamente usando la regola di De L'Hôpital:

$$\lim_{y\to 0+}\frac{\sin y^2 - y^2\cos 2y^2}{y^5} = (H) = \lim_{y\to 0+}\frac{2y\cos y^2 - 2y\cos 2y^2 + 4y^3\sin 2y^2}{5y^4}$$

$$= \frac{2}{5}\lim_{y\to 0+}\frac{y\cos y^2 - y\cos 2y^2}{y^4} + \frac{4}{5}\lim_{y\to 0+}\frac{\sin 2y^2}{y}$$

$$= \frac{2}{5}\lim_{y\to 0+}\frac{\cos y^2 - \cos 2y^2}{y^3} + 0$$

$$= (H) = \frac{2}{5}\lim_{y\to 0+}\frac{-2y\sin y^2 + 4y\sin 2y^2}{3y^2}$$

$$= (H) = \frac{4}{15}\Big(\lim_{y\to 0+}\frac{-\sin y^2}{y} + 2\lim_{y\to 0+}\frac{\sin 2y^2}{y}\Big) = 0$$

(è stato utilizzato due volte $\sin(y^2) \approx y^2$). Quindi il limite cercato è $2\sqrt{3}$.

37) Il limite si presenta in una forma indeterminata 0^0. Possiamo riscrivere usando la funzione esponenziale:

$$\left(\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^4}\right)^{-\frac{2}{\log x}} = \exp\left(\log\Big(\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^4}\Big)\frac{-2}{\log x}\right). \tag{37.1}$$

Dobbiamo dunque calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\Big(\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^4}\Big)}{\log x}.$$

Usando le proprietà del logaritmo otteniamo

$$L = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\Big(\frac{1}{x^2}\big(3 - \frac{5}{x^2}\big)\Big)}{\log x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\Big(\frac{1}{x^2}\Big) + \log\Big(3 - \frac{5}{x^2}\Big)}{\log x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-2\log x + \log\Big(3 - \frac{5}{x^2}\Big)}{\log x} = -2 + \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\Big(3 - \frac{5}{x^2}\Big)}{\log x}.$$

Dal momento che $\log\Big(3 - \frac{5}{x^2}\Big) \to \log 3$ per $x \to +\infty$, quest'ultimo limite è uguale a 0, e quindi $L = -2$. Sostituendo L in (37.1), si ottiene che il limite cercato è e^4.

38) Come nel limite precedente il risultato cercato è $\exp(4L)$, dove L è dato dal limite

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\Big(\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^5}\Big)}{\log x}.$$

Seguiamo qui una risoluzione diversa da quella dell'esercizio 37. Notiamo che il limite L si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Possiamo quindi applicare la regola di De L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\Big(\frac{3x^3-5}{x^5}\Big)}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3x^3-5) - \log(x^5)}{\log x}$$

$$= (H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{9x^2}{3x^3-5} - 5\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-6x^3+25}{3x^3-5} = -2.$$

Il limite cercato è dunque e^{-8}.

39) Per semplificare i calcoli, possiamo cambiare variabile ponendo $y = \frac{1}{x}$. Il limite da calcolare diventa quindi

$$L = \lim_{y\to0+} \Big(\frac{1}{y(1-e^{-y})} - \frac{1}{y^3}\sin y\Big)^2 \log\Big(\cos(2y) + 5y\sin(2y)\Big)$$

$$= \lim_{y\to0+} \frac{1}{y^6}\Big(\frac{y^2}{(1-e^{-y})} - \sin y\Big)^2 \log\Big(\cos(2y) + 5y\sin(2y)\Big).$$

Esaminiamo la funzione

$$\frac{y^2}{(1-e^{-y})} - \sin y = \frac{y^2 - (1-e^{-y})\sin y}{(1-e^{-y})}.$$

Si ha $1 - e^{-y} = y + o(y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$ e

$$y^2 - (1-e^{-y})\sin y = y^2 - (y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2))(y + o(y^2)) = \frac{1}{2}y^3 + o(y^3),$$

per cui

$$\frac{y^2 - (1-e^{-y})\sin y}{(1-e^{-y})} \approx \frac{\frac{1}{2}y^3}{y} = \frac{1}{2}y^2.$$

Per quanto riguarda la funzione $\log\Big(\cos(2y) + 5y\sin(2y)\Big)$, possiamo sviluppare facilmente l'argomento del log, ottenendo

$$\begin{aligned}\cos(2y) + 5y\sin(2y) &= 1 - \frac{1}{2}(2y)^2 + o(y^2) + 5y(2y + o(y))\\ &= 1 - 2y^2 + 10y^2 + o(y^2) = 1 + 8y^2 + o(y^2).\end{aligned}$$

Ricordando che $\log(1+z) = z + o(z)$ per $z \to 0$, si ha

$$\log\Big(\cos(2y) + 5y\sin(2y)\Big) = 8y^2 + o(y^2).$$

Dunque il limite vale

$$L = \lim_{y\to 0+} \frac{1}{y^6}\Big(\frac{1}{2}y^2\Big)^2 (8y^2 + o(y^2)) = 2.$$

40) Il limite è analogo a quello dell'esercizio precedente. Cambiando variabile $y = \frac{1}{x}$ si ottiene il limite

$$L = \lim_{y\to 0+} \frac{1}{y^6}\Big(\frac{y^2}{(1-e^{-y})} - \sin y\Big)^2 \log\Big(\cos(4y) - 2y\sin(4y)\Big).$$

Come nella risoluzione dell'esercizio 39 si vede che

$$\frac{y^2}{(1-e^{-y})} - \sin y \approx \frac{1}{2}y^2,$$

mentre

$$\begin{aligned}\cos(4y) - 2y\sin(4y) &= 1 - \frac{1}{2}(4y)^2 + o(y^2) - 2y(4y + o(y))\\ &= 1 - 8y^2 - 8y^2 + o(y^2) = 1 - 16y^2 + o(y^2),\end{aligned}$$

e quindi

$$\log\Big(\cos(4y) - 2y\sin(4y)\Big) = -16y^2 + o(y^2).$$

Il limite cercato è dunque

$$\lim_{y\to 0+} \frac{1}{4y^2}(-16y^2 + o(y^2)) = -4.$$

41) Il limite si presenta nella forma indeterminata $1^{+\infty}$. Conviene riscrivere l'argomento del limite usando la funzione esponenziale:

$$\Big(\frac{\cos(2x) + \cosh(2x)}{2}\Big)^{\frac{3}{4x^4}} = \exp\Big(\frac{3}{4x^4}\ \log\Big(\frac{\cos(2x) + \cosh(2x)}{2}\Big)\Big).$$

Si deve quindi calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{\log\Big(\frac{1}{2}\big(\cos(2x) + \cosh(2x)\big)\Big)}{x^4},$$

che si presenta nella forma indeterminata 0/0. Possiamo utilizzare la regola di De L'Hôpital, ricordando che

$$D\Big(\log\Big(\frac{\cos(2x)+\cosh(2x)}{2}\Big)\Big) = \frac{2(-\sin(2x)+\sinh(2x))}{\cos(2x)+\cosh(2x)}.$$

Si ha

$$L = (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{2(-\sin(2x)+\sinh(2x))}{4x^3(\cos(2x)+\cosh(2x))} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin(2x)+\sinh(2x)}{4x^3}$$

(abbiamo tenuto conto del fatto che $\cos(2x)+\cosh(2x)\to 2$ per $x\to 0$). Abbiamo ancora una forma indeterminata 0/0. Possiamo quindi ri-applicare la regola di De L'Hôpital, e ottenere

$$\begin{aligned} L = (H) = & \lim_{x\to 0+} \frac{2(-\cos(2x)+\cosh(2x))}{12x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\cos(2x)+\cosh(2x)}{6x^2} \\ = (H) = & \lim_{x\to 0+} \frac{2(\sin(2x)+\sinh(2x))}{12x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(2x)+\sinh(2x)}{6x} \\ = (H) = & \lim_{x\to 0+} \frac{2(\cos(2x)+\cosh(2x))}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Il risultato è infine $\exp(\frac{3}{4}L) = \exp(\frac{1}{2})$.

42) Analogamente al limite precedente si può riscrivere

$$\Big(\frac{\cos(3x)+\cosh(3x)}{2}\Big)^{\frac{4}{3x^4}} = \exp\Big(\frac{4}{3x^4}\ \log\Big(\frac{\cos(3x)+\cosh(3x)}{2}\Big)\Big),$$

per cui si deve calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{4\log\Big(\frac{1}{2}\big(\cos(3x)+\cosh(3x)\big)\Big)}{3x^4}.$$

Possiamo utilizzare gli sviluppi di Taylor per le funzioni cos e cosh fino al grado 4, ottenendo

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= 1 - \frac{1}{2}(3x)^2 + \frac{1}{24}(3x)^4 + o(x^4) \\ \cosh(3x) &= 1 + \frac{1}{2}(3x)^2 + \frac{1}{24}(3x)^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\frac{\cos(3x)+\cosh(3x)}{2} = \frac{2+\frac{27}{4}x^4+o(x^4)}{2} = 1 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^4),$$

e (ricordando che $\log(1+z) = z + o(z)$ per $z \to 0$)

$$\log\Big(\frac{\cos(3x)+\cosh(3x)}{2}\Big) = \log\Big(1 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^4)\Big) = \frac{27}{8}x^4 + o(x^4).$$

Dunque si può calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{4(\frac{27}{8}x^4 + o(x^4))}{3x^4} = \frac{9}{2}.$$

Il risultato è quindi $\exp(\frac{9}{2})$.

43) Consideriamo per prima cosa gli integrali

$$\int_{\frac{2}{x}}^{\log 3x} e^t \arctan(t)dt, \text{ e } \qquad \int_{\frac{2}{x}}^{\log 3x} \frac{\sin t}{t^3}dt.$$

Per quanto riguarda il primo, la funzione integranda è sempre positiva, vale 0 in 0 e per $t \to +\infty$ si ha $e^t \arctan t \approx \frac{\pi}{2}e^t$. Quindi applicando il criterio del confronto asintotico si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{2}{x}}^{\log 3x} e^t \arctan(t)dt = +\infty.$$

Per quanto riguarda il secondo integrale, si ha

$$|\frac{\sin t}{t^3}| \leq \frac{1}{t^3},$$

quindi la funzione $\frac{\sin t}{t^3}$ è assolutamente integrabile per $t \to +\infty$. In 0 invece si ha

$$\frac{\sin t}{t^3} \approx \frac{1}{t^2},$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{\frac{2}{x}}^{\log 3x} \frac{\sin t}{t^3}dt = +\infty.$$

Dunque il limite si presenta nella forma indeterminata ∞/∞.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \int_{\frac{2}{x}}^{\log 3x} \Big(e^t \arctan(t) + \frac{\sin t}{t^3}\Big)dt.$$

Essa è ben definita e derivabile per x sufficientemente grande e, per il teorema fondamentale del calcolo, si ha:

$$f'(x) = \Big(e^{\log(3x)} \arctan\log(3x) + \frac{\sin\log(3x)}{\log^3(3x)}\Big)D\log(3x)$$

$$- \Big(e^{\frac{2}{x}} \arctan\frac{2}{x} + (\frac{x}{2})^3 \sin\frac{2}{x}\Big)D(\frac{2}{x}) \qquad .$$

$$= \Big(3x \arctan(\log(3x)) + \frac{\sin\log(3x)}{\log^3(3x)}\Big)\frac{1}{x} + \Big(e^{\frac{2}{x}} \arctan(\frac{2}{x}) + (\frac{x}{2})^3 \sin(\frac{2}{x})\Big)\frac{2}{x^2}$$

Per il teorema di Hopital si ha quindi

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f'(x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \Big(3\arctan(\log(3x)) + \frac{\sin\log(3x)}{x\log^3(3x)} + \frac{2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}\arctan(\frac{2}{x}) + \frac{x}{4}\sin(\frac{2}{x})\Big)$$

$$= 3\lim_{x\to+\infty}\arctan(\log(3x)) + \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\sin(\frac{2}{x}) = 3\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}.$$

44) Il limite è simile al precedente. Cerchiamo qui di seguire un procedimento leggermente diverso dallo svolgimento dell'esercizio 43.

Come in precedenza si nota che le funzioni $e^t\arctan t$ e $\sin t/t^3$ sono l'una continua in 0, l'altra integrabile in senso improprio a $+\infty$. Quindi

$$\int_{\frac{2}{x}}^{\log 2x} e^t\arctan t dt \approx \int_0^{\log 2x} e^t\arctan t dt,$$

$$\int_{\frac{2}{x}}^{\log 2x} \frac{\sin t}{t^3}dt \approx \int_{\frac{2}{x}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}dt$$

per $x\to+\infty$. Il nostro limite è quindi uguale a

$$L = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\bigg(\int_0^{\log 2x} e^t\arctan t dt + \int_{\frac{2}{x}}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^3}dt\bigg).$$

Questo limite, come nell'esercizio precedente, si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Possiamo applicare la regola di De L'Hôpital, ricordando che

$$D\bigg(\int_0^{\log 2x} e^t\arctan t dt\bigg) = e^{\log 2x}\arctan(\log 2x)\cdot D(\log 2x)$$

$$= 2x\arctan(\log 2x)\frac{1}{x} = 2\arctan(\log 2x),$$

$$D\bigg(\int_{\frac{2}{x}}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^3}dt\bigg) = -\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}^3}\cdot D(\frac{2}{x})$$

$$= -\frac{x^3\sin(\frac{2}{x})}{8}\Big(-\frac{2}{x^2}\Big) = \frac{1}{4}x\sin(\frac{2}{x}).$$

Si ha
$$L = (H) = \lim_{x\to+\infty} \Big(2\arctan(\log 2x) + \frac{1}{4}x\sin(\frac{2}{x})\Big)$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty} \arctan(\log 2x) + \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} x\sin(\frac{2}{x})$$

$$= 2(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} x\sin(\frac{2}{x}) = \pi + \frac{1}{2}\lim_{y\to 0+}\frac{\sin y}{y} = \pi + \frac{1}{2}$$
(abbiamo usato il campio di variabile $y = \frac{2}{x}$).

45) Il limite si presenta nella forma indeterminata $0\cdot+\infty$; infatti si ha
$$\lim_{x\to 0+}\int_1^{\frac{1}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}}\,dt = \int_1^{+\infty} t^3 e^{\frac{1}{t}}\,dt = +\infty,$$
per il criterio del confronto per gli integrali impropri, poichè $t^3 e^{\frac{1}{t}} \approx t^3$ per $t\to+\infty$.

Esaminiamo l'andamento della funzione $16\log(\cos(x)) - 4\log(\cos(2x))$ per $x\to 0$, usando lo sviluppo di Taylor di cos e log:
$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^4)$$
$$\log(1-y) = -y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^4),$$
per cui si ottiene
$$\log(\cos x) = \Big(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\Big) - \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)^2 + o(x^4) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4),$$
$$\log(\cos 2x) = \Big(-\frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4\Big) - \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}(2x)^2\Big)^2 + o(x^4) = -2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4),$$
e quindi
$$16\log(\cos(x)) - 4\log(\cos(2x)) = 4x^4 + o(x^4).$$
Si ha dunque
$$L = \lim_{x\to 0+}\big(16\log(\cos(x)) - 4\log(\cos(2x))\big)\int_1^{\frac{1}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}}\,dt = 4\lim_{x\to 0+} x^4\int_1^{\frac{1}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}}\,dt.$$
Riscriviamo questo limite nella forma indeterminata ∞/∞:
$$L = 4\lim_{x\to 0+}\frac{\displaystyle\int_1^{\frac{1}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}}\,dt}{x^{-4}}.$$
Possiamo allora applicare la regola di De L'Hôpital, ricordando che
$$D\Big(\int_1^{\frac{1}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}}\,dt\Big) == (\frac{1}{x})^3 e^x\; D(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^3}e^x(-\frac{1}{x^2}) = -x^{-5}e^x.$$
Si ottiene infine
$$L = (H) = 4\lim_{x\to 0+}\frac{-x^{-5}e^x}{-4x^{-5}} = 1.$$

46) Il limite è analogo al precedente. Calcoliamo lo sviluppo di Taylor della funzione $12\log(\cos x) - 4\log(\cos(\sqrt{3}x))$. Si ha

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\\ \cos(\sqrt{3}x) &= 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{3}x)^2 + \frac{1}{24}(\sqrt{3}x)^4 + o(x^4)\\ &= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4),\end{aligned}$$

e quindi (ricordando che $\log(1-y) = -y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^4)$)

$$\begin{aligned}12\log(\cos x) &= 12\log\Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\Big)\\ &= 12\Big(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}x^2\big)^2 + o(x^4)\Big) = -6x^2 - x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\log(\cos(\sqrt{3}x)) &= 4\log\Big(1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)\Big)\\ &= 4\Big(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{2}\big(\frac{3}{2}x^2\big)^2 + o(x^4)\Big) = -6x^2 - 3x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Dunque si ottiene lo sviluppo di Taylor

$$12\log(\cos x) - 4\log(\cos(\sqrt{3}x)) = \big(-6x^2 - x^4\big) - \big(-6x^2 - 3x^4\big) + o(x^4) = 2x^4 + o(x^4).$$

Il nostro limite è quindi uguale a

$$L = \lim_{x\to 0+} 2x^4 \int_1^{\frac{2}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}}\,dt = 2\lim_{x\to 0+} \frac{\displaystyle\int_1^{\frac{2}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}}\,dt}{x^{-4}}.$$

Quest'ultimo limite si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Possiamo applicare la regola di De L'Hôpital, ricordando che

$$D\Big(\int_1^{\frac{2}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}}\,dt\Big) = \Big(\frac{2}{x}\Big)^3 e^{\frac{x}{2}} \cdot D\Big(\frac{2}{x}\Big) = 8x^{-3}e^{\frac{x}{2}}\big(-\frac{2}{x^2}\big) = -16x^{-5}e^{\frac{x}{2}}.$$

Abbiamo dunque

$$L = (H) = 2\lim_{x\to 0+} \frac{-16x^{-5}}{-4x^{-5}} = 8.$$

47) Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Per applicare il metodo degli sviluppi di Taylor dobbiamo determinare l'ordine di infinitesimo di numeratore o denominatore. Studiamo per prima cosa il comportamento del denominatore, per $x \to 0$, che si presenta in una forma più semplice. Ricordando lo sviluppo del seno $\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4)$, si ottiene

$$\sin(x\sqrt{2}) - \sqrt{2}\sin(x) = -\sqrt{2}\frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

quindi

$$x\big(\sin(x\sqrt{2}) - \sqrt{2}\sin(x)\big) = -\sqrt{2}\frac{x^4}{6} + o(x^5).$$

Il nostro limite è uguale allora a

$$-3\sqrt{2}\lim_{x\to 0+}\frac{e^{(2(\sin x)^2)} - e^{2\sin(x^2)}}{x^4}.$$

Possiamo calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 per il numeratore. Ricordando gli sviluppi del seno (sopra) e dell'esponenziale $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, e che $\sin x \approx x$ per $x \to 0$, si ha

$$\begin{aligned} e^{(2(\sin x)^2)} &= 1 + 2(\sin x)^2 + 2(\sin x)^4 + o\big((\sin x)^4\big) \\ &= 1 + 2\big(x - \frac{x^3}{6}\big)^2 + 2x^4 + o(x^4) = 1 + 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + 2x^4 + o(x^4), \end{aligned}$$

$$e^{2\sin(x^2)} = 1 + 2\sin(x^2) + 2(\sin(x^2))^2 + o(x^4) = 1 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^4).$$

Dunque

$$e^{(2(\sin x)^2)} - e^{2\sin(x^2)} = -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4),$$

e il limite vale

$$-3\sqrt{2}\lim_{x\to 0+}\frac{-\frac{2}{3}x^4}{x^4} = 2\sqrt{2}.$$

48) Il limite è analogo a quello dell'esercizio 47. Seguiamo qui uno svolgimento leggermente differente. Possiamo riscrivere

$$e^{(3\sin^2 x)} - e^{3\sin(x^2)} = e^{3\sin(x^2)}\big(e^{(3(\sin^2 x - \sin(x^2)))} - 1\big).$$

Quindi, notando che $\exp(3\sin(x^2)) \to 1$ e che

$$(e^{(3(\sin^2 x - \sin(x^2)))} - 1) \approx (3(\sin^2 x - \sin(x^2))$$

per $x \to 0$ (infatti ricordiamo che $e^y - 1 \approx y$ per $y \to 0$), si ottiene il limite

$$L = \lim_{x\to 0+}\frac{3(\sin^2 x - \sin(x^2))}{x(\sin(2x) - 2\sin(x))}.$$

Esaminiamo prima il denominatore. Calcoliamo lo sviluppo di Taylor della funzione $\sin(2x) - 2\sin(x)$ fino all'ordine 3:

$$\begin{aligned}\sin(2x) - 2\sin(x) &= \big(2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + o(x^3)\big) - 2\big(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\big)\\ &= -x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Quindi il denominatore vale

$$x(\sin(2x) - 2\sin x) = -x^4 + o(x^4).$$

Per quanto riguarda il numeratore, si ha

$$\sin^2 x = \big(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\big)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^3),$$

$$\sin(x^2) = x^2 + o(x^4),$$

per cui

$$3(\sin^2 x - \sin(x^2)) = -x^4 + o(x^4).$$

Possiamo calcolare ora il limite

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{-x^4 + o(x^4)}{-x^4 + o(x^4)} = 1.$$

49) Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Possiamo applicare la regola di De L'Hôpital, ottenendo

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x\to 0+} \frac{\log(\cosh(2x)) + \log(\cos(2x))}{\log(\cosh(2x^2)) - \log(\cos(2x^2))}\\[2ex]
&= (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{2\dfrac{\sinh 2x}{\cosh 2x} - 2\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}}{4x\dfrac{\sinh(2x^2)}{\cosh(2x^2)} + 4x\dfrac{\sin(2x^2)}{\cos(2x^2)}}\\[2ex]
&= \lim_{x\to 0+} \frac{\dfrac{\sinh(2x)\cos(2x) - \cosh(2x)\sin(2x)}{\cos(2x)\cosh(2x)}}{2x \cdot \dfrac{\sinh(2x^2)\cos(2x^2) + \cosh(2x^2)\sin(2x^2)}{\cos(2x^2)\cosh(2x^2)}}\\[2ex]
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0+} \frac{\sinh(2x)\cos(2x) - \cosh(2x)\sin(2x)}{x(\sinh(2x^2)\cos(2x^2) + \cosh(2x^2)\sin(2x^2))}\end{aligned}$$

(si è usato $\cosh y \to 1$, $\cos y \to 1$ per $x \to 0$). Quest'ultimo limite è ancora nella forma indeterminata $0/0$. Possiamo quindi ri-applicare la regola di De L'Hôpital:

$$L = (H) = \lim_{x\to 0+} \frac{-2\sinh(2x)\sin(2x)}{\sinh(2x^2)\cos(2x^2)+\cosh(2x^2)\sin(2x^2)+8x^2\cosh(2x^2)\cos(2x^2)}.$$

Possiamo semplificare questo limite ricordando che $\sinh(2x) \approx 2x$ e $\sin(2x) \approx 2x$ per $x \to 0$. Si ottiene

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{-8x^2}{\sinh(2x^2)\cos(2x^2)+\cosh(2x^2)\sin(2x^2)+8x^2\cosh(2x^2)\cos(2x^2)}.$$

Possiamo ancora una volta applicare la regola di De L'Hôpital.

$$\begin{aligned} L &= (H) \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{-16x}{24x\cosh(2x^2)\cos(2x^2)+32x^3(\sinh(2x^2)\cos(2x^2)-\cosh(2x^2)\sin(2x^2)} \\ &= (H) = \lim_{x\to 0+} -16\Big/\Big(24\cosh(2x^2)\cos(2x^2)+160x^2(\sinh(2x^2)\cos(2x^2) \\ &\quad -\cosh(2x^2)\sin(2x^2))-256x^4\sinh(2x^2)\sin(2x^2)\Big) = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Si consiglia di calcolare il limite usando anche gli sviluppi di Taylor (si veda l'esercizio seguente).

50) Il limite è analogo a quello dell'esercizio 49. Calcoliamolo qui usando gli sviluppi di Taylor di log, cos e cosh. Si ha

$$\begin{aligned} \cosh y &= 1+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{24}y^4+o(y^4) = 1+\frac{1}{2}y^2+o(y^2), \\ \cos y &= 1-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{24}y^4+o(y^4) = 1-\frac{1}{2}y^2+o(y^2), \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \cosh(x\sqrt{2}) &= 1+x^2+\frac{1}{6}x^4+o(x^4), \\ \cos(x\sqrt{2}) &= 1-x^2+\frac{1}{6}x^4+o(x^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh(x^2\sqrt{3}) &= 1+\frac{3}{2}x^4+o(x^4), \\ \cos(x^2\sqrt{3}) &= 1-\frac{3}{2}x^4+o(x^4). \end{aligned}$$

Quindi, ricordando che $\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + o(z^2) = z + o(z)$ per $z \to 0$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\log(\cosh(x\sqrt{2})) &= \log(\ 1 + x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)) \\
&= x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2}(x^2 + o(x^2))^2 + o(x^4) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \\
\log(\cos(x\sqrt{2})) &= \log(1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)) \\
&= -x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2}(-x^2 + o(x^2))^2 + o(x^4) \\
&= -x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log(\cosh(x^2\sqrt{3})) &= \log(1 + \frac{3}{2}x^4 + o(x^4)) = \frac{3}{2}x^4 + o(x^4) \\
\log(\cos(x^2\sqrt{3})) &= \log(1 - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4)) = -\frac{3}{2}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Dunque, sommando, si ha infine

$$\begin{aligned}
\log(\cosh(x\sqrt{2})) + \log(\cos(x\sqrt{2})) &= (x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)) + (-x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)) \\
&= -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \\
\log(\cosh(x^2\sqrt{3})) - \log(\cos(x^2\sqrt{3})) &= (\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)) - (-\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)) \\
&= 3x^4 + o(x^4),
\end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\cosh(x\sqrt{2})) + \log(\cos(x\sqrt{2}))}{\log(\cosh(x^2\sqrt{3})) - \log(\cos(x^2\sqrt{3}))} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{3x^4 + o(x^4)} = -\frac{2}{9}.$$

Si confronti questo metodo di risoluzione con quello dell'esercizio 49.

51) Esaminiamo per prima cosa il denominatore: notiamo che si ha

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\log(1+\exp y)}{y} = (H) = \lim_{y\to+\infty} \frac{\frac{e^y}{1+e^y}}{1} = 1,$$

e quindi anche

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\log\Big(1 + \exp\big(\frac{\sqrt{x}}{2}\big)\Big)\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}} = 1.$$

Dunque il limite cercato è uguale a

$$2^{\frac{1}{3}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_1^{(x^{\frac{1}{3}})} \Big(\frac{\arctan(2t)}{\sqrt{t}} + \frac{\log(2+\cos t)}{(1+t^2)}\Big) dt}{x^{\frac{1}{6}}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_1^{(x^{\frac{1}{3}})} \frac{\arctan(2t)}{\sqrt{t}} dt}{x^{\frac{1}{6}}} + 2^{\frac{1}{3}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_1^{(x^{\frac{1}{3}})} \frac{\log(2+\cos t)}{(1+t^2)} dt}{x^{\frac{1}{6}}}.$$

L'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(2+\cos t)}{(1+t^2)})dt$$

è convergente (applicare il criterio del confronto con $\log 3/(1+t^2)$), per cui il secondo limite si presenta nella forma $c/+\infty$, ovvero è uguale a 0. Ci siamo quindi ridotti al calcolo di

$$2^{\frac{1}{3}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_1^{(x^{\frac{1}{3}})} \frac{\arctan(2t)}{\sqrt{t}} dt}{x^{\frac{1}{6}}} = (H) = 2^{\frac{1}{3}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\arctan(2(x^{\frac{1}{3}}))}{x^{\frac{1}{6}}} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{6} x^{-\frac{5}{6}}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} \lim_{x\to+\infty} 2\arctan(2(x^{\frac{1}{3}})) = \pi\ 2^{\frac{1}{3}}.$$

52) Possiamo razionalizzare il quoziente moltiplicando e dividendo per

$$\sqrt{\cos(x^2)} + \sqrt{\cos x}.$$

Si ottiene così il limite

$$\frac{4}{3} \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x^2) - \cos x}{\left(\sqrt{\cos(x^2)} + \sqrt{\cos x}\right)\left(\cos(x^3) - \cos x\right)} = \frac{2}{3} \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x^2) - \cos x}{\cos(x^3) - \cos x}.$$

Possiamo applicare il teorema di De L'Hôpital, ottenendo

$$\frac{2}{3} \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x^2) - \cos x}{\cos(x^3) - \cos x} = (H) = \frac{2}{3} \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin(x^2)2x + \sin x}{-\sin(x^3)3x^2 + \sin x}$$

$$= (H) = \frac{2}{3} \lim_{x\to 0+} \frac{-\cos(x^2)4x^2 - 2\sin(x^2) + \cos x}{-\cos(x^3)9x^4 - 6x\sin(x^3) + \cos x} = \frac{2}{3}.$$

53) Il limite è analogo al precedente. Proponiamo un calcolo alternativo usando gli sviluppi di Taylor. Si ha

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = 1 + o(x^2),$$

$$\cos(\sqrt{3}\,x) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\cos(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x^6 + o(x^6) = 1 + o(x^2),$$

$$\cos(\sqrt{2}\,x) = 1 - x^2 + o(x^2),$$

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z + o(z);$$

quindi

$$\sqrt{\cos(x^2)} = \sqrt{1 + o(x^2)} = 1 + o(x^2),$$

$$\sqrt{\cos(\sqrt{3}\,x)} = \sqrt{1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)} = 1 - \frac{3}{4}x^2 + o(x^2),$$

$$4\Big(\sqrt{\cos(x^2)} - \sqrt{\cos(\sqrt{3}\,x)}\Big) = 3x^2 + o(x^2),$$

$$3(\cos(x^3) - \cos(\sqrt{2}\,x)) = 3x^2 + o(x^2),$$

per cui

$$\lim_{x\to 0+} \frac{4\Big(\sqrt{\cos(x^2)} - \sqrt{\cos(\sqrt{3}\,x)}\Big)}{3(\cos(x^3) - \cos(\sqrt{2}\,x))} = \lim_{x\to 0+} \frac{3x^2 + o(x^2)}{3x^2 + o(x^2)} = 1.$$

54) Il limite si presenta nella forma indeterminata $(+\infty)^0$. Trasformiamo il limite in forma esponenziale:

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\Big(\frac{1}{x}\arctan x\Big)\log\Big(\int_1^x e^{2t}\log t\,dt\Big)\right).$$

Dobbiamo quindi calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left(\Big(\frac{1}{x}\arctan x\Big)\log\Big(\int_1^x e^{2t}\log t\,dt\Big)\right) = \frac{\pi}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log\Big(\int_1^x e^{2t}\log t\,dt\Big)}{x}\right);$$

il risultato cercato sarà dato da e^L. Il limite si presenta ora nella forma indeterminata ∞/∞. Possiamo applicare il teorema di De L'Hôpital, ricordando che

$$D\left(\log\Big(\int_1^x e^{2t}\log t\,dt\Big)\right) = \frac{e^{2x}\log x}{\int_1^x e^{2t}\log t\,dt}.$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
L = (H) = \frac{\pi}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\log x}{\int_1^x e^{2t}\log t\,dt} \\
= (H) = \frac{\pi}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}\log x + \frac{1}{x}e^{2x}}{e^{2x}\log x} \\
= \frac{\pi}{2} \lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{x\log x}\right) = \pi.
\end{aligned}
$$

Dunque il limite cercato è e^{π}.