

Calcolo di integrali

Rimandiamo ai libri di testo per i teoremi fondamentali del calcolo, per la consultazione di tavole di integrali immediati e per regole di integrazione per integrali di tipo speciale (in particolare il metodo dei *fratti semplici* per l'integrazione di funzioni razionali fratte). Ricordiamo i due seguenti teoremi.

Teorema di integrazione per parti. Siano f, g due funzioni derivabili con derivata continua sull'intervallo I e $a, b \in I$. Allora

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g'(t)f(t) dt.$$

$g(t)$ viene detto *fattore finito*, $f'(t)dt$ viene detto *fattore differenziale*.

Teorema di integrazione per sostituzione. Siano I, J due intervalli, f una funzione continua su I , $\varphi : J \rightarrow I$ una funzione derivabile con derivata continua. Allora $\forall \alpha, \beta \in J$ si ha

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Inoltre, se φ è biettiva, allora $\forall a, b \in I$ si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Esercizi proposti

1) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} \cos(3x)e^{5x} dx$$

2) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} \sin(2x)e^{4x} dx$$

3) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{-1/2}^{1/2} t^2 \arctan |2t| dt$$

4) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{-\sqrt{3}/4}^{\sqrt{3}/4} t^2 \arccos |2t| dt$$

5) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{-1/(2\sqrt{2})}^{1/(2\sqrt{2})} t^2 \arcsin |2t| dt$$

6) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{t^2 + 3t + 4}{t^2 + 4t + 5} dt$$

7) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{(1-\sqrt{3})}^1 \frac{t^2 - t + 2}{t^2 - 2t + 2} dt$$

8) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{t^5}{\sqrt{t^4 + 1}} dt$$

9) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{-1}^1 t^2 \sqrt{t^6 + 1} dt$$

10) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}} dx$$

11) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx$$

12) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$$

13) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx$$

14) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x} dx$$

15) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^2 \arctan \sqrt{1+2|x-1|} dx$$

16) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_2^4 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2+2|x-3|}}\right) dx$$

17) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{-1}^{(\pi^2-1)} \sqrt{x+1} \sin(\sqrt{x+1}) dx$$

18) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{-2}^{\left(\frac{\pi^2-18}{9}\right)} \sqrt{x+2} \sin(\sqrt{x+2}) dx$$

19) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{(\sqrt{3}+1)/2}^{(\sqrt{8}+1)/2} \frac{1}{(2x-1)\sqrt{8-16x+16x^2}} dx$$

20) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{(\sqrt{3}+1)/3}^{(\sqrt{8}+1)/3} \frac{1}{(1-3x)\sqrt{8-24x+36x^2}} dx$$

21) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 5}{(1+x^2)^2} dx$$

22) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 - 4x + 3}{(1+x^2)^2} dx$$

23) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{1/2}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} dx$$

24) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{1/3}^{2/3} \frac{1}{\sqrt{6x - 9x^2}} dx$$

25) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{3/4}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{4x - 4x^2}} dx$$

26) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{1/3}^1 \frac{x}{\sqrt{6x - 9x^2}} dx$$

27) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi/3} \sin^3(x) dx$$

28) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^3(x) dx$$

29) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_1^2 x^3 \log(x^8) dx$$

30) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_2^3 x^2 \log(x^6) dx$$

31) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx$$

32) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{(1-\sqrt{2})}^1 \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 4x + 6}} dx$$

33) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(2x)}{(2 \sin x + 3) \cos x} dx$$

34) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{-\pi/6}^0 \frac{\cos(2x)}{(3 \sin x - 4) \cos x} dx$$

35) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x(4 - \log^2 x)} dx$$

36) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x(6 - \log^2 x)} dx$$

37) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \log(1 + \cos^2 x) dx$$

38) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \log(3 + \sin^2 x) dx$$

39) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{1}{5x + |4 - \log^2 x|} dx$$

40) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_1^3 \frac{1}{12x + |4 - \log^2 x|} dx$$

41) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin(3x)}{\cos x} dx$$

42) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos(3x)}{\sin x} dx$$

43) Si calcoli il seguente integrale:

$$2 \int_0^{1/\sqrt{2}} x^3 e^{2x^2} dx$$

44) Si calcoli il seguente integrale:

$$3 \int_0^{1/\sqrt{3}} x^3 e^{3x^2} dx$$

45) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^{1/2} \frac{\arctan(-2x)}{(1+2x)^2} dx$$

46) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^{1/3} \frac{\arctan(-3x)}{(1+3x)^2} dx$$

47) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{-\pi/6}^{\pi/12} \frac{8 \sin x \cos x}{(1+4 \cos^2(2x))^2} dx$$

48) Si calcoli il seguente integrale:

$$15 \int_0^{\pi/3} \sin(2x) \sqrt{1 - \cos x} dx$$

49) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi} x \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right) dx$$