Integrali impropri - svolgimento degli esercizi

1) La funzione integranda è continua su $[1, +\infty)$ e quindi localmente integrabile. Esaminiamone il segno: si ha

$$0 < \frac{1}{x} < 1 \Longrightarrow \sin^5(\frac{1}{x}) > 0$$

$$\log(x^2+1) - 2\log x = \log(x^2+1) - \log x^2 > 0;$$

quindi l'integranda è una funzione positiva. Per applicare il criterio del confronto asintotico (per $x \to +\infty$) consideriamo i comportamenti asintotici di numeratore e denominatore: ricordando che $\sin y \approx y$ per $y \to 0$, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^5 \sin^5(\frac{1}{x}) = \lim_{y\to 0+} \frac{\sin^5 y}{y^5} = 1,$$

quindi $\sin^5(\frac{1}{x}) \approx \frac{1}{x^5}$. Inoltre, ricordando che $\log(1+y) \approx y$ per $y \to 0$, otteniamo anche

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(\log(x^2+1) - 2\log x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2(\log(x^2+1) - \log x^2) = \lim_{x\to+\infty} x^2(\log(1+\frac{1}{x^2}))$$

$$= \lim_{y\to 0+} \frac{\log(1+y)}{y} = 1,$$

quindi $\log(x^2+1) - 2\log x \approx \frac{1}{x^2}$. In conclusione, per il criterio del confronto asintotico il nostro integrale ha lo stesso carattere di

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx,$$

ovvero converge.

2) L'esercizio è analogo al precedente. La funzione integranda è localmente integrabile e positiva. Inoltre per $x \to +\infty$ si ha

$$\sin^6(\frac{1}{x}) \approx (\frac{1}{x})^6,$$

$$\begin{aligned}\log(x^5+1) - 5\log x &= \log(x^5+1) - 5\log x = \\ &= \log\Big(1 + (\frac{1}{x})^5\Big) \approx (\frac{1}{x})^5.\end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{\sin^6(\frac{1}{x})}{\log(x^5+1) - 5\log x} \approx \frac{(\frac{1}{x})^6}{(\frac{1}{x})^5} = \frac{1}{x};$$

per il criterio del confronto asintotico il nostro integrale ha quindi lo stesso carattere dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx,$$

ovvero è positivamente divergente.

3) La funzione integranda è chiaramente positiva e continua su $[1, +\infty)$, e quindi localmente integrabile. Applichiamo il criterio del confronto asintotico con la funzione $\exp(-x)$ il cui integrale converge:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)\exp(x^2)}{1+\exp(2x^2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x+x^2)}{\exp(2x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \exp(x-x^2) = 0,$$

dunque il nostro integrale converge.

4) L'esercizio è analogo al precedente. la funzione integranda è localmente integrabile e positiva su $[1, +\infty)$. Si può applicare il criterio del confronto con la funzione $\exp(-x)$: per $x \geq 1$ si ha $x^4 \geq x$, quindi

$$x^4 + x \leq 2x^4 \leq 4x^4,$$

$$\exp(x^4)\exp(x) = \exp(x^4 + x) \leq \exp(4x^4) \leq 1 + \exp(4x^4),$$

e dunque

$$\frac{\exp(x^4)}{1+\exp(4x^4)} \leq \exp(-x).$$

Dato che l'integrale improprio di $\exp(-x)$ converge, anche il nostro integrale è convergente.

5) Esaminiamo il segno della funzione integranda. Si ha $x^5 - x^3 + 3 \geq 3 > 0$ per $x \geq 1$, e inoltre (dato che $-1 \leq \sin x \leq 1$)

$$0 < \log 2 \leq \log(3 + \sin x) \leq \log 4.$$

Dunque

$$0 \leq \log 2\ \frac{1}{\sqrt[4]{x^5 - x^3 + 3}} \leq \frac{\log(3+\sin x)}{\sqrt[4]{x^5 - x^3 + 3}} \leq \log 4\ \frac{1}{\sqrt[4]{x^5 - x^3 + 3}}.$$

Possiamo applicare due volte il criterio del confronto, ottenendo che il nostro integrale ha lo stesso carattere dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x^5 - x^3 + 3}}\, dx.$$

A questo integrale possiamo applicare il criterio del confronto asintotico, confrontando la funzione integranda con la funzione $|x|^{5/4}$. Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|^{5/4}}{\sqrt[4]{x^5 - x^3 + 3}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{\frac{x^5}{x^5 - x^3 + 3}} = 1,$$

il nostro integrale ha lo stesso carattere di

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{|x|^{5/4}}\, dx,$$

ovvero è convergente.

6) L'esercizio è analogo al precedente. Si ha $x^4 - x^3 + 3 \geq 3 > 0$ per $x \geq 1$, e inoltre

$$0 < \log 2 \leq \log(3 + \cos x) \leq \log 4.$$

La funzione integranda è positiva, e il nostro integrale (per confronto) ha lo stesso carattere dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4 - x^3 + 3}}\, dx.$$

Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|^{4/5}}{\sqrt[5]{x^4 - x^3 + 3}} = 1,$$

per il criterio del confronto asintotico il nostro integrale ha lo stesso carattere di

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{|x|^{4/5}}\, dx,$$

ovvero è positivamente divergente.

7) L'esercizio è simile ai due precedenti. Notiamo che $x^6 - x^3 + 3 \geq 3$ per $x \geq 1$, $-1 \leq \cos^2 x \leq 1$, e dunque $0 \leq \log(2 + \cos^2 x) \leq \log 3$. Si ha quindi

$$0 \leq \frac{\log(2 + \cos^2 x)}{\sqrt[5]{x^6 - x^3 + 3}} \leq \frac{\log 3}{\sqrt[5]{x^6 - x^3 + 3}}$$

Dato che

$$\sqrt[5]{x^6 - x^3 + 3} \approx x^{6/5}$$

per $x \to +\infty$, l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log 3}{\sqrt[5]{x^6 - x^3 + 3}}\, dx$$

per il criterio del confronto asintotico ha lo stesso carattere dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{6/5}}\, dx,$$

che è convergente. Per il criterio del confronto quindi anche il nostro integrale converge.

8) Osserviamo innanzitutto che la funzione integranda è positiva, quindi l'integrale improprio converge o diverge positivamente. Inoltre,

$$\lim_{x\to+\infty} \cosh(e^{-x}) = \cosh 0 = 1$$

e ciò suggerisce di confrontare asintoticamente la funzione
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4 \cosh(e^{-x}) + 1}}$ con $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$. Otteniamo, quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^4 \cosh(e^{-x}) + 1}} = 1$$

e concludiamo, grazie al criterio del confronto asintotico, che l'integrale proposto è convergente.

9) Procedendo come nell'esercizio precedente, confrontiamo asintoticamente la funzione integranda con $g(x) = \dfrac{1}{x}$, ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 \cosh(e^{-x}) + 1}} = 1.$$

Concludiamo, quindi, per il criterio del confronto asintotico, che l'integrale proposto diverge positivamente.

10) Per stabilire il carattere dell'integrale dato, osserviamo che

$$-1 \leq \sin(e^x) \leq 1 \quad \text{e} \quad x^5 + \sin(e^x) > 0 \quad \forall x \geq 1.$$

Inoltre, $\arctan x > 0 \quad \forall x > 0$, quindi la funzione integranda è positiva e l'integrale improprio converge o diverge positivamente. Confrontiamo asintoticamente la funzione $f(x) = \dfrac{x \arctan x}{\sqrt[3]{x^5 + \sin(e^x)}}$ con $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}\, x \arctan x}{\sqrt[3]{x^5 + \sin(e^x)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^5}\, \arctan x}{\sqrt[3]{x^5}\sqrt[3]{1 + \frac{\sin(e^x)}{x^5}}} = \frac{\pi}{2}.$$

Si ha, quindi $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{2/3}}$ e l'integrale improprio diverge positivamente.

11) Procediamo come nell'esercizio precedente, osservando innanzitutto la positività della funzione integranda. Come prima, si trova

$$f(x) = \frac{x \arctan x}{\sqrt[4]{x^7 + \sin(e^x)}} \sim \frac{1}{x^{3/4}}$$

e si conclude, applicando il criterio del confronto asintotico, che l'integrale proposto diverge positivamente.

12) La funzione in considerazione si può scrivere

$$f(x) = \frac{x(x-2)}{|x-1|^{4/3}\,|x-2|^{10/7}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x}{|x-1|^{4/3}\,|x-2|^{3/7}} & \text{per } x > 2 \\ -\dfrac{x}{|x-1|^{4/3}\,|x-2|^{3/7}} & \text{per } x < 2 \text{ e } x \neq 1. \end{cases}$$

Dunque f è definita e continua su $\mathbf{R}\setminus\{1,2\}$. In particolare è continua (e quindi integrabile) su $[-1,0]$. Dunque (B) non è verificata. Esaminiamo i rimanenti casi.

(C): f è continua e positiva su $[3,+\infty)$. Si ha

$$\frac{x}{|x-1|^{4/3}\,|x-2|^{3/7}} \approx \frac{x}{|x|^{4/3}\,|x|^{3/7}} = \frac{1}{x^{(4/3)+(3/7)-1}} = \frac{1}{x^{16/21}}$$

per $x \to +\infty$. Per il criterio del confronto asintotico l'integrale $\displaystyle\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ ha lo stesso carattere dell'integrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{|x|^{16/21}}\,dx.$$

Dato che $16/21 < 1$ questo integrale è divergente, quindi (C) non è verificata.

(A): f è negativa e continua in $[0,1)$. Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico, notando che

$$f(x) = -\frac{x}{|x-1|^{4/3}\,|x-2|^{3/7}} \approx -\frac{1}{|x-1|^{4/3}}$$

per $x \to 1-$; dato che $1 < 4/3$ l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-1|^{4/3}}\,dx$$

è divergente, e quindi lo è anche $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. Dunque (A) non è verificata.

(D): f è positiva e continua in $(2,3]$. Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico, notando che

$$f(x) = \frac{x}{|x-1|^{4/3}\,|x-2|^{3/7}} \approx \frac{2}{|x-2|^{3/7}}$$

per $x \to 2+$; dato che $3/7 < 1$ l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{2}{|x-2|^{3/7}}\,dx$$

è convergente, e quindi lo è anche $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. Dunque (D) è verificata.

13) Questo esercizio è simile al precedente. La funzione in considerazione si può scrivere

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{|x-1|^{8/5}\,|x-2|^{8/7}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x}{|x-1|^{3/5}\,|x-2|^{8/7}} & \text{per } x > 1 \text{ e } x \neq 2 \\ -\dfrac{x}{|x-1|^{3/5}\,|x-2|^{8/7}} & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

Dunque f è definita e continua su $\mathbf{R}\setminus\{1,2\}$. In particolare è continua (e quindi integrabile) su $[-1,0]$. Dunque (B) non è verificata. Esaminiamo i rimanenti casi.

(C): f è continua e positiva su $[3,+\infty)$. Si ha

$$\frac{x}{|x-1|^{3/5}\,|x-2|^{8/7}} \approx \frac{x}{|x|^{3/5}\,|x|^{8/7}} = \frac{1}{x^{(3/5)+(8/7)-1}} = \frac{1}{x^{26/35}}.$$

Per il criterio del confronto asintotico l'integrale $\displaystyle\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ ha lo stesso carattere dell'integrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{|x|^{26/35}}\,dx.$$

Dato che $26/35 < 1$ questo integrale è divergente, quindi (C) non è verificata.

(D): f è continua e positiva su $(2,3]$. Per il criterio del confronto asintotico, dato che

$$\frac{x}{|x-1|^{3/5}\,|x-2|^{8/7}} \approx \frac{2}{|x-2|^{8/7}}$$

per $x \to 2+$, l'integrale $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$ ha lo stesso carattere dell'integrale

$$\int_2^3 \frac{1}{|x-2|^{8/7}}\,dx,$$

che è divergente perchè $8/7 > 1$. Dunque (D) non è verificata.

(A): f è definita, continua e negativa su $[0,1)$. Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico per $x \to 1-$, dato che

$$\frac{x}{|x-1|^{3/5}\,|x-2|^{8/7}} \approx -\frac{1}{|x-1|^{3/5}},$$

ottenendo che il nostro integrale ha il carattere di $\displaystyle -\int_0^1 \frac{1}{|x-1|^{3/5}}\,dx$, ovvero è convergente. Dunque (A) è verificata.

14) Questo esercizio è simile ai due precedenti. Consideriamo la funzione in questione, che possiamo scrivere

$$f(x) = \frac{e^x - 3}{|x - \log 2|^{4/3}\, |x - \log 3|^{10/7}}.$$

Essa è definita e continua in $\mathbf{R} \setminus \{\log 2, \log 3\}$; in particolare è continua, e quindi integrabile in $[-\log 2, 0]$, e quindi (B) non è verificata. Esaminiamo le altre possibili risposte.

(D): la funzione f è continua e negativa su $[0, \log 2)$, e quindi localmente integrabile. Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico, notando che

$$f(x) \approx -\Big(\frac{1}{|\log 3 - \log 2|^{10/7}}\Big)\ \frac{1}{|x - \log 2|^{4/3}}$$

per $x \to \log 2-$. Dato che $4/3 > 1$ l'integrale improprio

$$\int_0^{\log 2} \frac{1}{|x - \log 2|^{4/3}}\, dx$$

è divergente, e quindi anche

$$\int_0^{\log 2} f(x)\, dx$$

lo è. Dunque (A) non è verificata.

(C): la funzione f è positiva e continua (e quindi localmente integrabile) su $[\log 4, +\infty)$. Notiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{|x|^{4/3}\, |x|^{10/7}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{|x|^{58/21}} = +\infty,$$

e quindi f non è integrabile su $[\log 4, +\infty)$. Dunque (C) non è verificata.

(D): la funzione f è continua e positiva su $(\log 3, \log 4]$, e quindi localmente integrabile. Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico, notando che

$$\lim_{x\to\log 3} \frac{e^x - 3}{x - \log 3} = \frac{e^3}{\log 3},$$

e quindi

$$e^x - 3 \approx \Big(\frac{e^3}{\log 3}\Big)(x - \log 3),$$

$$f(x) \approx \Big(\frac{e^3}{\log 3\, |\log 3 - \log 2|^{4/3}}\Big)\ \frac{1}{|x - \log 3|^{3/7}}$$

per $x \to \log 3+$. Dato che $3/7 < 1$ l'integrale

$$\int_{\log 3}^{\log 4} \frac{1}{|x - \log 3|^{3/7}}\, dx$$

è convergente, e quindi anche

$$\int_{\log 3}^{\log 4} f(x)\, dx$$

lo è. Dunque (D) è verificata.

15) Il fattore $(1-x^{3/2})$ è negativo nell'intervallo di integrazione come pure la funzione integranda, quindi l'integrale improprio converge o diverge negativamente. Confrontiamo asintoticamente la funzione $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}(1-x^{3/2})}{\log(1+x)(x^3+1)}$ con

$$g(x)=-\frac{x^2}{x^3\log x}=-\frac{1}{x\log x}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}&\left(\frac{\sqrt{x}(1-x^{3/2})}{\log(1+x)(x^3+1)}\cdot(-x\log x)\right)=\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3\log x\left(1-\frac{1}{x^{3/2}}\right)}{\log(1+x)(x^3+1)}\right)=\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\log(x+1)}=1.\end{aligned}$$

Quindi, $f(x)\approx-\dfrac{1}{x\log x}$.

Ricordando che $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\log x}dx$ diverge positivamente, si conclude che l'integrale proposto diverge negativamente.

16) L'integrale dato può essere studiato procedendo come nell'esercizio precedente o, in alternativa, usando anche il criterio del confronto.

Si ha $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}(1+x^{3/2})}{\log(1+x)(x^4+1)}>0$ nell'intervallo di integrazione e

$$\log(1+x)>1\quad\text{e}\quad x^4+1>x^4\qquad\forall x\ge 2.$$

Quindi

$$\frac{\sqrt{x}(1+x^{3/2})}{\log(1+x)(x^4+1)}<\frac{\sqrt{x}(1+x^{3/2})}{x^4\log(1+x)}<\frac{\sqrt{x}(1+x^{3/2})}{x^4}\approx\frac{1}{x^2}.$$

Si deduce, quindi, utilizzando i criteri del confronto e del confronto asintotico, che l'integrale dato converge.

17) Studiamo innanzitutto il segno della funzione integranda.

Il fattore $(\sqrt{x}-1)$ è negativo nell'intervallo di integrazione e ciò implica che l'integrale improprio converge o diverge negativamente. Notiamo, poi, che la funzione integranda è illimitata in ogni intorno destro di $x=0$.

Confrontiamo asintoticamente la funzione $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\log(1+x^{3/4})(x^3+1)}$ con $g(x)=-\dfrac{1}{x^{1/4}}$, per $x\to0^+$. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\frac{-x^{1/4}\cdot\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\log(1+x^{3/4})(x^3+1)}&=\lim_{x\to0+}\frac{x^{1/4}\cdot\sqrt{x}}{\log(1+x^{3/4})}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{x^{3/4}}{x^{3/4}+o(x^{3/4})}=1,\end{aligned}$$

avendo usato lo sviluppo di Taylor $\log(1+y) = y + o(y)$, per y vicino a zero. Dalla convergenza di $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/4}} dx$, si deduce, per il criterio del confronto asintotico, che l'integrale dato è convergente.

18) Osserviamo che la funzione integranda è positiva e illimitata in ogni intorno destro di $x = 0$. Procediamo come nell'esercizio precedente e concludiamo subito che

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\log(1+x^{3/2})(x^4+1)} \approx \frac{\sqrt{x}}{\log(1+x^{3/2})} \approx \frac{\sqrt{x}}{x^{3/2}} = \frac{1}{x},$$

per $x \to 0+$. Perciò, l'integrale proposto diverge positivamente.

19) La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione, quindi l'integrale improprio converge o diverge positivamente. Osserviamo che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{2+x}{x}}}{x} &= \lim_{x\to+\infty} x^{\left(\frac{2+x}{x}-1\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^{\left(\frac{2}{x}\right)} = \exp\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{2\log x}{x}\right) \\ &= \exp(0) = 1,\end{aligned}$$

cioè, $x^{\frac{2+x}{x}} \approx x$, per $x \to +\infty$. Questo suggerisce di confrontare asintoticamente $f(x) = \frac{x^{\frac{2+x}{x}}}{x^{3/2}\log x}$ con $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}\log x}$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/2}\log x \cdot x^{\frac{2+x}{x}}}{x^{3/2}\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/2}\log x \cdot x^{\frac{2+x}{x}}}{x^{1/2}\cdot x\log x} = 1,$$

da cui si legge che

$$f(x) \approx \frac{1}{x^{1/2}\log x}.$$

Ricordando che $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}\log x} dx$ diverge positivamente, si conclude, per il criterio del confronto asintotico, che l'integrale proposto diverge positivamente.

20) L'integrale proposto è del tutto simile a quello dell'esercizio precedente: ripercorrendo gli stessi passaggi, si ottiene

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^{\frac{2-x}{x}}}{x^{1/2}\log x} \approx \frac{x^{-1}}{x^{1/2}\log x} = \\ &= \frac{1}{x^{3/2}\log x} \le \frac{1}{x^{3/2}},\end{aligned}$$

poichè $\log x \ge 1 \quad \forall x \ge e$. Applicando i criteri del confronto e del confronto asintotico, si conclude che l'integrale proposto è convergente.

21) Circa il segno della funzione integranda, osserviamo che essa è negativa nell'intervallo di integrazione, quindi l'integrale improprio converge o diverge negativamente. Inoltre, essa è illimitata in ogni intorno destro di $t = 0$.
Dal limite notevole $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$, si deduce che

$$f(t) = \frac{\sin t \log t}{t^{9/4}} = \frac{\sin t \log t}{t \cdot t^{5/4}} \approx \frac{\log t}{t^{5/4}},$$

per $t \to 0^+$. Inoltre, per $0 < t \leq \frac{1}{e}$, vale la disuguaglianza $|\log t| \geq 1$, che implica

$$-\frac{\log t}{t^{5/4}} = \frac{|\log t|}{t^{5/4}} \geq \frac{1}{t^{5/4}},$$

per $0 < t \leq \frac{1}{e}$. Ricordando che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{5/4}}dt$ diverge positivamente, utilizzando il criterio del confronto, si deduce che $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log t}{t^{5/4}}dt$ diverge negativamente, come pure, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale dato.

22) Procediamo come nell'esercizio precedente, ripercorrendo gli stessi passaggi. Si ha

$$f(t) = \frac{\sin t \log t}{t^{7/3}} = \frac{\sin t \log t}{t \cdot t^{4/3}} \approx \frac{\log t}{t^{4/3}},$$

per $t \to 0^+$. Inoltre, per $0 < t \leq \frac{1}{e}$, vale la disuguaglianza

$$-\frac{\log t}{t^{4/3}} = \frac{|\log t|}{t^{4/3}} \geq \frac{1}{t^{4/3}}.$$

I criteri del confronto e del confronto asintotico permettono di concludere che l'integrale dato diverge negativamente.

23) La funzione integranda è negativa e limitata nell'intervallo di integrazione. Effettuando il cambio di variabile $y = -x$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{-1} \log(1 - e^x)dx = -\int_{+\infty}^{1} \log(1 - e^{-y})dy = \int_1^{+\infty} \log(1 - e^{-y})dy.$$

Confrontiamo asintoticamente $f(y) = \log(1 - e^{-y})$ con $g(y) = -e^{-y}$.
Otteniamo

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\log(1 - e^{-y})}{-e^{-y}} = (H) = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y}}{e^{-y}(1 - e^{-y})} = 1.$$

Quindi, $f(y) \approx -e^{-y}$, per $y \to +\infty$.

Studiamo ora la convergenza di $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-y}dy$ con il criterio del confronto. Si ha

$$e^{-y} = \frac{1}{e^y} < \frac{1}{y^2},$$

per y abbastanza grande.
Quindi $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-y}dy$ converge e

$$\int_{-\infty}^{-1} \log(1-e^x)dx = \int_1^{+\infty} \log(1-e^{-y})dy$$

converge per il criterio del confronto asintotico.

24) Osserviamo che la funzione integranda è positiva. Come nell'esercizio precedente, effettuiamo la sostituzione $y = -x$, da cui si ottiene

$$\int_{-\infty}^{-1} \log(1+e^{2x})dx = \int_1^{+\infty} \log(1+e^{-2y})dy.$$

Si ha

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\log(1+e^{-2y})}{e^{-2y}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-2y}+o(e^{-2y})}{e^{-2y}} = 1,$$

avendo usato lo sviluppo di Taylor $\log(1+z) = z + o(z)$, per z vicino a zero. Quindi,

$$\log(1+e^{-2y}) \approx e^{-2y},$$

per $y \to +\infty$.
Dobbiamo ora studiare il carattere dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-2y}dy$. Per questo, utilizziamo due metodi. Dapprima, osserviamo che vale la disuguaglianza

$$e^{-2y} = \frac{1}{e^{2y}} < \frac{1}{e^y} = e^{-y} \quad \forall y \geq 1.$$

Ora, la convergenza di $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-y}dy$ è stata provata nell'esercizio precedente: il criterio del confronto permette di concludere che anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-2y}dy$ converge. In alternativa, dimostriamo la convergenza di $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-2y}dy$ mediante la definizione. Si ha

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} e^{-2y}dy &= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b e^{-2y}dy \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \left[e^{-2y}\right]_1^b \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \left(e^{-2b}-e^{-2}\right) = \frac{1}{2e^2}.\end{aligned}$$

Infine, il criterio del confronto asintotico permette di concludere che l'integrale dato converge.