

Numeri complessi - svolgimento degli esercizi

1) Questo esercizio richiede di calcolare la potenza n -esima ($n = 45$) di un numero complesso. Scriviamo z nella forma esponenziale $z = \rho e^{i\theta}$ dove

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \text{ e } \theta = -\frac{\pi}{6} \text{ dato che } \sin \theta = -\frac{1}{2} \text{ e } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Si ha}$$

$$z^{45} = \rho^{45} e^{i45\theta} = e^{i(-\frac{45}{6}\pi)} = e^{i(-\frac{45}{6}\pi + 8\pi)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i.$$

2) Questo esercizio è del tutto simile al precedente. Si ha $\rho = 1$ e $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Quindi

$$z^{45} = e^{i(-\frac{45}{4}\pi)} = e^{i(-\frac{45}{4}\pi + 12\pi)} = e^{i\frac{3}{4}\pi} = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3) Si tratta di determinare le radici terze di $w = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Scriviamo w nella forma esponenziale $w = \rho e^{i\theta}$ dove $\rho = 1$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$. Dette

$$z_k = R e^{i\varphi_k} \quad (k = 0, 1, 2)$$

le tre radici terze di w , si ha

$$R = \sqrt[3]{1} = 1 \text{ e } \varphi_k = \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Si ottengono i valori di $\varphi_0 = \frac{\pi}{12}$, $\varphi_1 = \frac{3}{4}\pi$, $\varphi_2 = \frac{17}{12}\pi$. Si tratta ora di determinare la forma cartesiana delle radici terze di w : per questo, utilizzeremo due metodi. Troviamo, dapprima, la forma cartesiana di $z_0 = e^{i\frac{\pi}{12}}$. Scriviamo z_0 nel seguente modo

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{aligned}$$

e moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si ottiene

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})). \end{aligned}$$

Determiniamo ora la forma cartesiana di $z_1 = e^{i\frac{3}{4}\pi}$. Si ha subito

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Infine, determiniamo la forma cartesiana di $z_2 = e^{i\frac{17}{12}\pi}$. Scriviamo z_2 nel seguente modo:

$$\begin{aligned} z_2 &= e^{i(\frac{3}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi)} = e^{i\frac{3}{4}\pi} \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi} \\ &= \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6} - i(\sqrt{6} + \sqrt{2})). \end{aligned}$$

In alternativa, utilizziamo le formule di bisezione e calcoliamo $\sin\frac{\pi}{12}$ e $\cos\frac{\pi}{12}$.

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{8}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Analogamente si calcola

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Si riottengono, quindi, le radici richieste in forma cartesiana

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})); \\ z_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \\ z_2 &= \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6} - i(\sqrt{6} + \sqrt{2})). \end{aligned}$$

4) Procedendo come nell'esercizio precedente, scriviamo $w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ nella forma esponenziale $w = e^{i\frac{2}{3}\pi}$. Dette $z_k = Re^{i\varphi_k}$ ($k = 0, 1$) le due radici seconde di w , si ha

$$R = \sqrt{1} = 1 \quad \text{e} \quad \varphi_k = \frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k = 0, 1.$$

Si ottengono i valori di $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ e $\varphi_1 = \frac{4}{3}\pi$. Quindi, si trova

$$z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad z_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le radici z_0 e z_1 sono, evidentemente, l'una l'opposta dell'altra.

5) Si ha $z = e^{i\frac{7}{6}\pi}$. Quindi

$$z^{68} = e^{i(\frac{7}{6} \cdot 68\pi)} = e^{i\frac{238}{3}\pi} = e^{i(\frac{238}{3}\pi - 80\pi)} = e^{i(-\frac{2}{3}\pi)} = e^{i\frac{4}{3}\pi} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

I tre esercizi successivi non sono diversi da quelli considerati in precedenza. Riportiamo, pertanto, soltanto il numero complesso richiesto, sottintendendo il procedimento seguito per calcolarlo, per il quale si veda, ad esempio, l'esercizio 1.

6) Si ha $z^{61} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

7) Si ha $z^{65} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

8) Si ha $z^{67} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

9) Risolviamo questo esercizio, del tutto simile al precedente, con un metodo alternativo. Scritto z nella forma esponenziale $z = e^{i\frac{3}{4}\pi}$, osserviamo che $z^4 = -1$. Quindi si ha

$$z^{65} = z \cdot z^{64} = z(z^4)^{16} = z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

10) Indicate con z_0 e z_1 le radici seconde di $w = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, si ha

$$z_0 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})) \quad \text{e} \quad z_1 = -z_0.$$

11) Lavorando come nell'esercizio precedente, si ha

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad z_1 = -z_0.$$

12) Si trova, procedendo, ad esempio come nell'esercizio 1, $z^{25} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

13) Analogamente, si trova $z^{28} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14) Ricordando quanto calcolato nell'esercizio 3, si ha

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \cos \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \sin \frac{5}{12}\pi;$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \sin \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{5}{12} \pi.$$

Quindi $z = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2} - i(\sqrt{6} + \sqrt{2}))$ si scrive nella forma $z = e^{i(-\frac{5}{12}\pi)}$. Ne segue

$$\begin{aligned} z^{19} &= e^{i(-\frac{5}{12} \cdot 19\pi)} = e^{i(-\frac{5}{12} \cdot (24-5)\pi)} = e^{i(-10\pi + \frac{25}{12}\pi)} = \\ &= e^{i(2\pi + \frac{\pi}{12})} = e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})). \end{aligned}$$

15) Le radici seconde di $w = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ sono

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})) \quad \text{e} \quad z_1 = e^{i\frac{13}{12}\pi} = -z_0.$$

16) Sia $u = z + i$. Si tratta, allora, di determinare i numeri complessi u tali che $u^2 = i$. Le radici seconde di $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ sono

$$u_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad u_1 = e^{i\frac{5}{4}\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Quindi, i numeri complessi z richiesti sono

$$z_0 = u_0 - i = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \quad \text{e} \quad z_1 = u_1 - i = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right).$$

17) Risolvendo questo esercizio come il precedente, si ha $u = z - 1$ e $u^2 = -i$. Le radici seconde di $-i = e^{i\frac{3}{2}\pi}$ sono

$$u_0 = e^{i\frac{3}{4}\pi} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad u_1 = e^{i\frac{7}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Si ottiene, quindi

$$z_0 = u_0 + 1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad z_1 = u_1 + 1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

18) In questo esercizio, si richiedono le radici seconde di

$$w = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Si ha, quindi

$$z_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}} \quad \text{e} \quad z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9}{8}\pi}.$$

Calcolando $\sin \frac{\pi}{8}$ e $\cos \frac{\pi}{8}$ applicando le formule di bisezione analogamente a quanto fatto nell'esercizio 3, si ottengono z_0 e z_1 in forma cartesiana

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{\sqrt{2} + 1} + i\sqrt{\sqrt{2} - 1} \right) \end{aligned}$$

e $z_1 = -z_0$.

19) Il modulo di $w = 2 - 2i$ è uguale a $\sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$, quindi il modulo delle radici seconde di w è uguale a $\sqrt{2\sqrt{2}}$. Scriviamo w in forma esponenziale

$$w = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Utilizzando le espressioni di $\sin \frac{\pi}{8}$ e $\cos \frac{\pi}{8}$ calcolate nell'esercizio precedente, si ha

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2} \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right) \\ &= \sqrt{\sqrt{2} + 1} - i\sqrt{\sqrt{2} - 1} \end{aligned}$$

e $z_1 = -z_0$.

20) Sia $u = z + i$. Si tratta di determinare le radici seconde di

$$u^2 = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Si ha

$$u_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) \quad \text{e} \quad u_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right).$$

Quindi, i numeri complessi richiesti sono

$$z_0 = u_0 - i = \frac{\sqrt{6}}{2} + i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \quad \text{e} \quad z_1 = u_1 - i = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right).$$

21) Procedendo come nell'esercizio precedente, si trova

$$z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad z_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - 1 + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

22) Scriviamo l'equazione data nella forma equivalente

$$z^2 - 6z + 9 = -4,$$

cioè

$$(z - 3)^2 = (\pm 2i)^2,$$

da cui si ricava $z - 3 = \pm 2i$, cioè $z = 3 \pm 2i$.

23) Procediamo come nell'esercizio precedente. Si trova

$$z^2 - 2z + 1 = -4,$$

$$(z - 1)^2 = (\pm 2i)^2.$$

Si ottiene $z = 1 \pm 2i$.

24) Scriviamo l'equazione data nella forma equivalente

$$z^2 - 2iz + i^2 = 4,$$

cioè

$$(z - i)^2 = 4,$$

da cui si ricava $z = i \pm 2$.

25) È del tutto simile all'esercizio precedente. Si trova $z = i \pm 3$.

26) Scriviamo l'equazione data nella forma equivalente

$$(z - 2)^2 = -i.$$

Procedendo come in 17, si trova

$$z_1 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

27) Si trova

$$z_1 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

28) Riscriviamo l'equazione data effettuando la scomposizione

$$(z - i)(z + 3i) = 0,$$

da cui si ricava $z_1 = i$ e $z_2 = -3i$. In alternativa, operando come nell'esercizio 26, scriviamo l'equazione data nella forma equivalente

$$(z + i)^2 = -4,$$

da cui si riottengono $z_1 = i$ e $z_2 = -3i$.

29) Procedendo come nell'esercizio precedente, si trova $z_1 = -i$ e $z_2 = 3i$.

30) Indicate con z_k ($k = 0, 1, 2$) le tre radici terze di $w = 8i$, si ha

$$z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Si determina, quindi, l'insieme

$$I = \{Im(z) : z^3 = 8i\} = \{Im(z_0), Im(z_1), Im(z_2)\} = \{-2, 1\}.$$

Perciò, $\min I = -2$.

31) Operando come nell'esercizio precedente, si trova

$$z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Si determina, quindi, l'insieme

$$R = \{Re(z) : z^3 = -8i\} = \{Re(z_0), Re(z_1), Re(z_2)\} = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}.$$

Perciò, $\max R = \sqrt{3}$.

32) Scriviamo $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ nella forma esponenziale $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Osserviamo che $z^3 = -1$ e che $z^{36} = e^{i \cdot 12\pi} = 1$. Quindi

$$z^{39} - z^{36} = z^{36}(z^3 - 1) = -2.$$

Si trova, allora

$$Im(z^{39} - z^{36}) = 0.$$

33) Sfruttando le osservazioni dell'esercizio precedente, si ha

$$z^{40} - z^{36} = z^{36}(z \cdot z^3 - 1) = -z - 1 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si trova, allora

$$Re(z^{40} - z^{36}) = -\frac{3}{2}.$$

34) Poniamo, innanzitutto, $z^2 = u$. Si tratta, allora, di risolvere

$$u^2 - (1+i)u + i = 0.$$

Scriviamo questa equazione nella forma equivalente

$$u^2 - (1+i)u + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 - i,$$

da cui

$$\left(u - \left(\frac{1+i}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 - i = \frac{i}{2} - i = -\frac{i}{2}.$$

Posto $w = u - \left(\frac{1+i}{2}\right)$, si tratta di risolvere

$$w^2 = -\frac{1}{2}i = \frac{1}{2}e^{i\frac{3}{2}\pi}.$$

Indicate con w_1 e w_2 le radici seconde di $-\frac{1}{2}i$, si ha

$$w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} = \frac{-1+i}{2} \quad \text{e} \quad w_2 = -w_1 = \frac{1-i}{2}.$$

Quindi

$$u_1 = w_1 + \frac{1+i}{2} = i \quad \text{e} \quad u_2 = w_2 + \frac{1+i}{2} = 1.$$

Ricordando la sostituzione iniziale, si ha $z^2 = i$ e $z^2 = 1$. Dalla prima equazione si ricava

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

dalla seconda

$$z_3 = 1 \quad \text{e} \quad z_4 = -1.$$

Individuiamo ora la soluzione $z_0 = x_0 + iy_0$ dell'equazione data che soddisfa la condizione $y_0 = -x_0^2\sqrt{2}$.

Si tratta di $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si ha, infatti $-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{2}$.

35) Lavoriamo come nell'esercizio precedente: riportiamo solo alcuni passi dello svolgimento, mantenendo le stesse notazioni. Si trova $u_1 = i$ e $u_2 = -1$. Si ottengono, inoltre,

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_3 = -i \quad \text{e} \quad z_4 = i.$$

La soluzione che soddisfa la condizione richiesta è quindi $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

36) Poniamo $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si tratta di determinare il modulo delle radici quarantesime di w . Si

ha $|w| = 1$ e $|z| = \sqrt[40]{1} = 1$.

Allora, detto E l'insieme

$$E = \left\{ |z| : z^{40} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

si ha $E = \{1\}$ ed, evidentemente, $\inf E = 1$.

37) Individuiamo la radice terza di $27i = 27e^{i\frac{\pi}{2}}$ avente parte reale positiva. Si ha

$$w = 3e^{i\frac{\pi}{6}} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}.$$

Inoltre, la radice terza di 1 avente parte reale positiva è $z = 1$. Si ottiene, quindi

$$w - z = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right) + i\frac{3}{2}$$

e

$$|w - z| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4} - 3\sqrt{3} + 1 + \frac{9}{4}} = \sqrt{10 - 3\sqrt{3}}.$$

38) Determiniamo le radici seconde di $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Si trova

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Analogamente, determiniamo le radici seconde di $4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$. Si trova

$$w_1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

e

$$w_2 = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -(\sqrt{2} + i\sqrt{2}).$$

Quindi, i numeri complessi $z - w$ sono

$$z - w = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right)\right) = \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}(1 + i)$$

e

$$z - w = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)\right) = \mp\frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i).$$

Si trova, allora

$$|z - w| = \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+1} = 3$$

e

$$|z - w| = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+1} = 1.$$

Quindi

$$E = \{|z - w| : z^2 = i \text{ e } w^2 = 4i\} = \{1, 3\}$$

e $\sup E = 3$.

L'esercizio può essere risolto diversamente in modo più veloce, rappresentando graficamente z_1 , z_2 , w_1 e w_2 nel piano di Gauss e considerando che $|z - w|$ è dato dalla lunghezza del segmento avente per estremi i punti z e w . Nel piano di Gauss, z_1 e z_2 (w_1 e w_2 , rispettivamente) sono l'intersezione della

circonferenza centrata nell'origine e di raggio uguale a 1 (uguale a 2, rispettivamente) con la bisettrice del primo e del terzo quadrante. Si trova, subito che

$$|z_1 - w_1| = |z_2 - w_2| = 1$$

e

$$|z_1 - w_2| = |z_2 - w_1| = 3,$$

da cui $\sup E = 3$.

39) Le radici seconde di $-4i = 4e^{i\frac{3\pi}{2}}$ sono

$$z_{1,2} = \pm 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pm (\sqrt{2} - i\sqrt{2}),$$

da cui

$$\sup\{\operatorname{Re}(z) : z^2 = -4i\} = \sqrt{2}.$$

Inoltre, le radici seconde di $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ sono

$$z_{1,2} = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

da cui

$$\sup\{\operatorname{Im}(z) : z^2 = i\} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Quindi, il numero richiesto è

$$\sqrt{2} \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$