

Numeri complessi

Breve ripasso. Sia $z = x + iy$ un numero complesso (scritto nella sua *forma cartesiana*) con *parte reale* $x = \operatorname{Re} z$ e *parte immaginaria* $y = \operatorname{Im} z$. Ricordiamo la sua *forma trigonometrica*:

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta),$$

dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e ϑ è una soluzione del sistema $\begin{cases} \rho \cos \vartheta = x \\ \rho \sin \vartheta = y, \end{cases}$ e la sua *forma esponenziale*:

$$z = \rho e^{i\vartheta}.$$

Circa il calcolo di potenze e di radici n -ime di numeri complessi, valgono i seguenti risultati.

Teorema. Sia $z = \rho e^{i\vartheta} = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$. Allora $z^n = \rho^n e^{i n \vartheta} = \rho^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta))$.

Teorema. Sia $w = R e^{i\varphi} \neq 0$. Allora esistono n radici distinte di $z^n = w$ della forma $z_k = \rho e^{i\vartheta_k}$, dove

$$\rho = \sqrt[n]{R}, \quad \vartheta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Esercizi proposti

1) Si determini la forma cartesiana del numero complesso z^{45} , dove

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}.$$

2) Si determini la forma cartesiana del numero complesso z^{45} , dove

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3) Si determinino le forme cartesiane dei numeri complessi z tali che

$$z^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- 4) Si determinino le forme cartesiane dei numeri complessi z tali che

$$z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- 5) Si determini la forma cartesiana del numero complesso z^{68} , dove

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}.$$

- 6) Si determini la forma cartesiana del numero complesso z^{61} , dove

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

- 7) Sia $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. Si determini la forma cartesiana del numero complesso z^{65} .

- 8) Sia $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$. Si determini la forma cartesiana del numero complesso z^{67} .

- 9) Sia $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si determini la forma cartesiana del numero complesso z^{65} .

- 10) Si determini la forma cartesiana delle radici seconde del numero complesso

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

- 11) Si determini la forma cartesiana delle radici seconde del numero complesso

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- 12) Sia $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. Si determini la forma cartesiana del numero complesso z^{25} .

- 13) Sia $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$. Si determini la forma cartesiana del numero complesso z^{28} .

- 14) Sia $z = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) - i\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$. Si determini la forma cartesiana del numero complesso z^{19} .

- 15) Si determini la forma cartesiana dei numeri complessi z tali che

$$z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

- 16) Si determinino i numeri complessi z tali che

$$(z + i)^2 = i.$$

- 17) Si determinino i numeri complessi z tali che

$$(z - 1)^2 = -i.$$

- 18) Si determinino i numeri complessi z tali che

$$z^2 = i + 1.$$

- 19) Si determinino i numeri complessi z tali che

$$z^2 = 2 - 2i.$$

- 20) Si determinino i numeri complessi z tali che

$$(z + i)^2 = 1 + i\sqrt{3}.$$

- 21) Si determinino i numeri complessi z tali che

$$(z + 1)^2 = 1 - i\sqrt{3}.$$

- 22) Si determini la forma cartesiana dei numeri complessi z tali che

$$z^2 - 6z + 13 = 0.$$

- 23) Si determini la forma cartesiana dei numeri complessi z tali che

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

- 24) Si determini la forma cartesiana dei numeri complessi z tali che

$$z^2 - 2iz - 5 = 0.$$

- 25) Si determini la forma cartesiana dei numeri complessi z tali che

$$z^2 - 2iz - 10 = 0.$$

- 26)** Si determini la forma cartesiana dei numeri complessi z tali che

$$z^2 - 4z + i + 4 = 0.$$

- 27)** Si determini la forma cartesiana dei numeri complessi z tali che

$$z^2 - 4z - i + 4 = 0.$$

- 28)** Si determini la forma cartesiana dei numeri complessi z tali che

$$z^2 + 2iz + 3 = 0.$$

- 29)** Si determini la forma cartesiana dei numeri complessi z tali che

$$z^2 - 2iz + 3 = 0.$$

- 30)** Determinare il valore di

$$\min\{Im(z) : z^3 = 8i\}.$$

- 31)** Determinare il valore di

$$\max\{Re(z) : z^3 = -8i\}.$$

- 32)** Sia $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Si determini la parte immaginaria di $z^{39} - z^{36}$.

- 33)** Sia $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Si determini la parte reale di $z^{40} - z^{36}$.

- 34)** Si determini la soluzione $z_0 = x_0 + iy_0$ dell'equazione

$$z^4 - (1 + i)z^2 = -i$$

che soddisfa $y_0 = -x_0^2\sqrt{2}$.

- 35)** Si determini la soluzione $z_0 = x_0 + iy_0$ dell'equazione

$$z^4 + (1 - i)z^2 = i$$

che soddisfa $y_0 = x_0^2\sqrt{2}$.

- 36)** Si determini il numero $\inf\{|z| : z^{40} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

- 37)** Siano w e z i due numeri complessi tali che

$$w^3 = 27i, z^3 = 1, Re w > 0, Re z > 0.$$

Determinare $|w - z|$.

- 38)** Determinare il valore $\sup\{|z - w| : z^2 = i, w^2 = 4i\}$.

- 39)** Determinare il valore

$$\sqrt{2}(\sup\{Re z : z^2 = -4i\} - \sup\{Im z : z^2 = i\}).$$